



AGH

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Wydział Fizyki I Informatyki Stosowanej

Praca magisterska

Marcin Dudziak

kierunek studiów: **fizyka techniczna**

specjalność: **fizyka komputerowa**

Korelacje układu biplanarnego dwóch pierścieni kwantowych w dwóch nanopłaszczyznach w zewnętrznym polu magnetycznym

Opiekun pracy: **Dr inż. Bartłomiej Szafran**

Kraków, grudzień 2008 r.

Oświadczam, świadom odpowiedzialności karnej za poświadczenie nieprawdy, że niniejszą pracę dyplomową wykonałem osobiście i samodzielnie i nie korzystałem ze źródeł innych niż wymienione.

Kraków, 05 XII 2008

Tematyka pracy magisterskiej i praktyki dyplomowej Marcin Dudziaka, studenta V roku studiów kierunku fizyka techniczna, specjalności fizyka komputerowa.

Temat pracy magisterskiej: **Korelacje układu biplanarnego dwóch pierścieni kwantowych w dwóch nanopłaszczyznach w zewnętrznym polu magnetycznym.**

Opiekun pracy: dr inż. Bartłomiej Szafran
Recenzenci pracy: dr inż. Tomasz Chwiej
Miejsce praktyki dyplomowej: WFiIS AGH, Kraków

Program pracy magisterskiej i praktyki dyplomowej

1. Omówienie realizacji pracy magisterskiej z opiekunem.
2. Zebranie i opracowanie literatury dotyczącej tematu pracy.
3. Praktyka dyplomowa:
 - zapoznanie się z ideą pracy,
 - uczestnictwo w przygotowaniu oprogramowania,
 - dyskusja i omówienie wyników,
 - sporządzenie sprawozdania z praktyki.
4. Kontynuacja obliczeń związanych z tematem pracy magisterskiej.
5. Zebranie i opracowanie wyników obliczeń.
6. Opracowanie redakcyjne pracy.

Termin oddania w dziekanacie: grudzień 2008

.....
(podpis kierownika zakładu)

.....
(podpis opiekuna)

*Serdeczne podziękowania
za wyrozumiałość, cierpliwość i wszelką okazaną pomoc
składam mojemu promotorowi dr inż. Bartłomiejowi Szafranowi*

SPIS TREŚCI

Wstęp	7
1 Teoria	8
1.1 Badany układ	8
1.2 Pojedynczy elektron	9
1.3 Przypadek dwóch elektronów	12
1.4 Metoda oddziaływania konfiguracji CI	12
1.5 Metoda Hartree-Focka	15
2. Wyniki	18
2.1 Metoda CI	18
2.2 Przybliżenie HF	21
Podsumowanie	27
Literatura	28

WSTĘP

Pierścienie półprzewodnikowe o wymiarach rzędu mikrometrów są badane od lat osiemdziesiątych XX wieku. Celem pierwszych badań była detekcja efektu Aharonova-Bohma [1] w pomiarach przewodności [2,3]. W kolejnej dekadzie prowadzone były pomiary magnetycznego momentu dipolowego generowanego przez prądy trwale krążące w pierścieniu umieszczonym w zewnętrznym polu magnetycznym [4]. W późniejszym czasie udało się wytworzyć pierścienie o wymiarach nanometrów w których można obserwować kwantowy efekt rozmiarowy. Pierścienie kwantowe obecnie produkowane są z wykorzystaniem techniki utleniania powierzchni [6] oraz trawienia [5] bądź też w oparciu o ich spontaniczny wzrost (*self-assembly*) [7]. Pierścienie nanometrycznych rozmiarów produkowane są zarówno w konfiguracjach otwartych – do badania zjawisk transportowych [8] jak i zamkniętych, w których bada się ich zastosowanie jako źródeł światła [9,10,11]. Istnieją również prace, w których bada się proces ładowania pierścieni kolejnymi elektronami [7] z wykorzystaniem spektroskopii pojemnościowej. W ostatnim czasie odkryto, iż namagnesowanie dużych zespołów samorganizowanych półprzewodnikowych pierścieni kwantowych ma widoczny wkład w namagnesowaniu całej próbki [12].

Równocześnie zostało przeprowadzonych wiele prac teoretycznych dotyczących układów zbudowanych z pierścieni kwantowych, większość z nich skupiona jest wokół problemu jednego, izolowanego pierścienia [10,11,13-18]. Obecnie coraz popularniejsze stają się prace nad matrycami złożonymi z wielu pierścieni [19,20]. Wytwarza się również pierścienie podwójne w różnych konfiguracjach: obok siebie, koncentrycznie jeden w drugim, lub pionowo – jeden nad drugim [21,13]. Obiekty te ze względu na bogatą fizykę są niezwykle atrakcyjne dla badań teoretycznych [13,22,23,24,25,26,27]. W niniejszej pracy zostały przebadane korelacje pomiędzy parą elektronów umieszczonych w dwóch pierścieniach w konfiguracji pionowej.

W obliczeniach używałem metody mieszania konfiguracji (z ang. *Configuration Interaction*), której wyniki porównywałem z wynikami metody Hartree-Focka. Metody średniego pola (HF) bywają przydatne przy ukazywaniu głównych własności układów silnie skorelowanych. Poniżej przedstawiłem przewidywania dokładnego podejścia (CI) stanu podstawowego, dla którego korelacje pomiędzy pierścieniami przy odpowiednim zewnętrznym strumieniu pola magnetycznego nabywają nieskończonego zasięgu (utrzymują się dla dowolnie dużej odległości pomiędzy pierścieniami). Stan taki pojawia się regularnie wraz ze zmianą strumienia pola magnetycznego, a przedziały zmienności pola, dla których on występuje zależą od odległości pomiędzy pierścieniami. Metoda średniego pola starają się uwzględnić

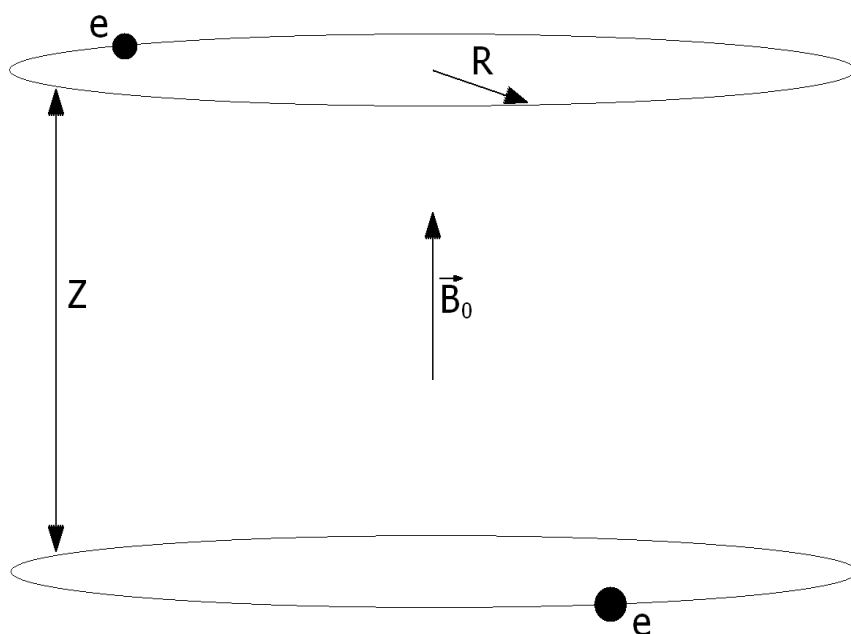
tą, niezwykle silną korelację łamiąc obrotową symetrię układu. Okazuje się, że istnieje graniczna odległość pomiędzy pierścieniami, dla której symetria jest łamana dla każdej wartości strumienia.

1 TEORIA

1.1 BADANY UKŁAD

Na rys. 1 przedstawiony jest schemat badanego układu. Zbudowany jest on z dwóch pierścieni o równych promieniach umieszczonych jeden nad drugi. W każdym z pierścieni znajduje się jeden elektron. Pierścienie umieszczone są w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B_0 i wektorze skierowanym równoległe do osi układu. Od pewnego czasu struktury tego typu są możliwe do wykonania, na rys. 2 znajduje się przykład takiego układu. Przedstawia on trzy warstwy pierścieni, umieszczone jeden nad drugi w odległości rzędu kilku nanometrów.

Odległość pomiędzy elektronami znajdującymi się w dwóch różnych pierścieniach oddalonych od siebie o Z , wynosi:



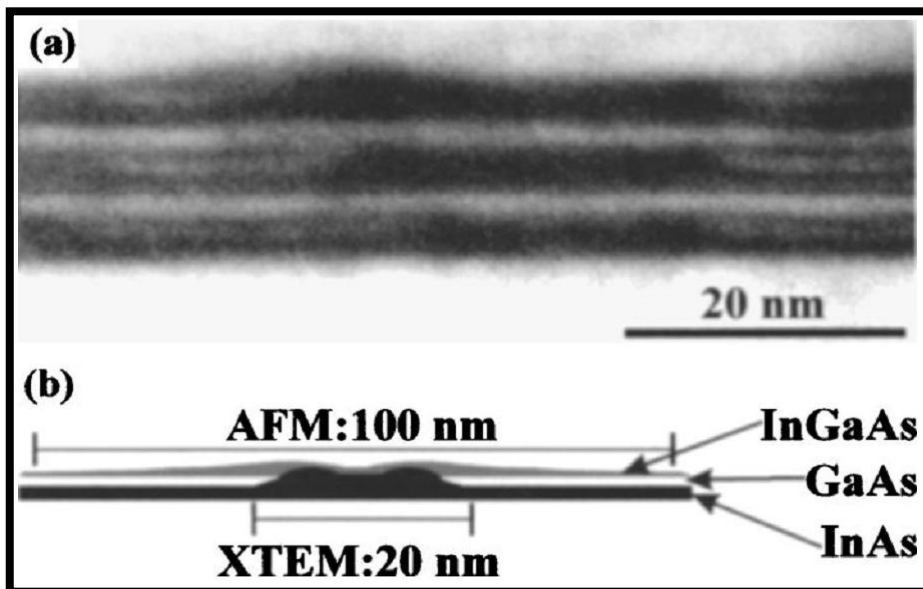
Rys. 1: Schemat badanego układu. Dwa pierścienie umieszczone jeden nad drugim. Pierścienie są od siebie oddalone o Z , w każdym pierścieniu znajduje się jeden elektron.

$$r_{12} = R\sqrt{\frac{Z^2}{R^2} + 2[1 - \cos(\phi_1 - \phi_2)]} \quad (1)$$

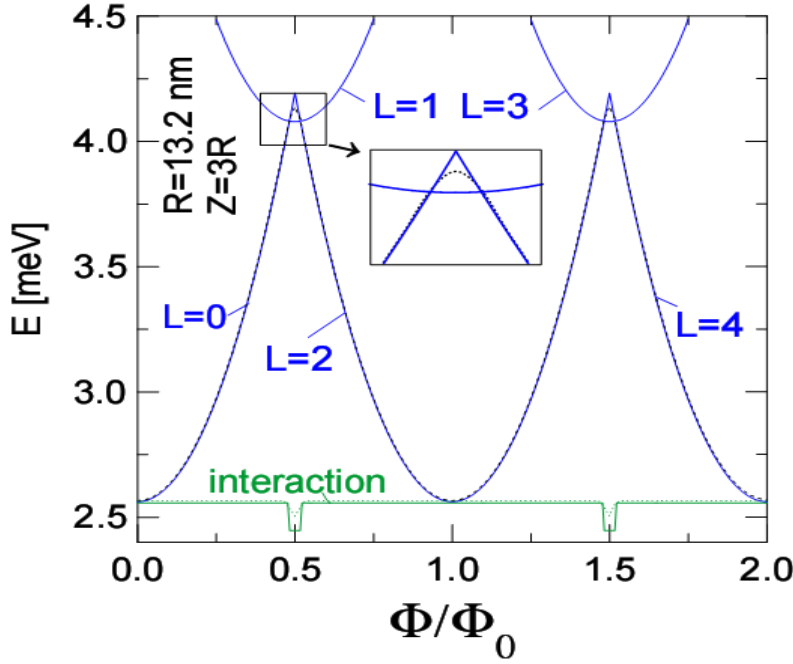
gdzie R to promień pierścieni. W niniejszej pracy rozważał będę dwie wartości promienia: $R = 13.2$ nm odpowiadającego samozorganizowanym pierścieniom kwantowym [8], które reprezentują przypadek silnego uwiązania i gdzie dominująca jest energia związana z kwantyzacją elektronu, oraz $R = 132$ nm który odpowiada słabemu uwiązaniu elektronów, gdzie dominuje energia oddziaływania pomiędzy elektronami, które realizowane są np. przy pomocy techniki utleniania powierzchni [15]. W całej niniejsze pracy zostało zaniedbane tunelowanie pomiędzy pierścieniami, co z kolei zapewnia separowalność funkcji falowych. Założenie takie jest słuszne dla dużych odległości pomiędzy pierścieniami i ten przypadek jest głównym tematem tej pracy. W granicy $Z = 0$ otrzymujemy znany przypadek pojedynczego pierścienia z dwoma elektronami w którym zachodzi ułamkowy efekt Aharonova-Bohma.

1.2 POJEDYNCZY ELEKTRON

Pod nieobecność zewnętrznego pola magnetycznego hamiltonian dla jednego elektronu znajdującego się w jednowymiarowym pierścieniu kwantowym o promieniu R ma postać:



Rys. 2: Przykład struktury, w której pierścienie kwantowe znajdują się jeden na drugim. (a) Rzeczywista struktura trzech płaszczyzn po jednym pierścieniu w każdej. (b) Schemat budowy pierścienia kwantowego [24].



Rys. 3: Rysunek odpowiada przypadkowi dla którego $R=13.2$ nm oraz $Z = 3R$. Dokładne wartości energii odpowiadają liniom ciągłym i podpisane są wartością całkowitego momentu pędu. Ciągła zielona linia znajdująca się na dole rysunku, odpowiada energii oddziaływania stanu podstawowego. Linie przerywane odpowiadają wartościom uzyskanym dzięki przybliżeniu HF: energia całkowita dla stanu podstawowego (górną, czarna linia przerywana znajdująca się bardzo blisko energii dokładnej), oraz energia oddziaływania (zielona linia, na dole rysunku). W środku rysunku znajduje się powiększony fragment odpowiadający sytuacji bardzo bliskiej do trzykrotnej degeneracji dla $\Phi = \Phi_0/2$.

$$h = -\frac{\hbar^2}{2mR^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (2)$$

gdzie m jest masą elektronu (bądź - jak w naszym przypadku - efektywną masą elektronu, którą przyjąłem dla GaAs $m = 0.067m_0$), ϕ natomiast jest położeniem kątowym elektronu. Po rozwiązaniu problemu własnego dla takiego hamiltonianu otrzymujemy następujące funkcje i wartości własne:

$$\psi_l(\phi) = e^{il\phi}, \quad \varepsilon_l = \frac{\hbar^2 l^2}{2mR^2}. \quad (3)$$

Jeżeli uwzględnimy fakt występowania pola magnetycznego, sytuacja się nieco zmienia. Założyliśmy, że pole magnetyczne występuje jedynie wewnątrz pierścienia

i posiada tam stałą wartość B_0 . Przypadek taki można zamodelować przyjmując potencjał wektorowy we współrzędnych walcowych w następującej postaci:

$$A_r = A_z = 0, \\ A_\phi = \begin{cases} \frac{B_0 r}{2} & \text{dla } r < R, \\ \frac{B_0 R^2}{2r} & \text{dla } r \geq R. \end{cases} \quad (4)$$

Całkowity strumień przenikający pierścień wynosi wówczas $\Phi = \pi R^2 B_0$. Hamiltonian w postaci ogólnej uwzględniający występowanie pola magnetycznego ma postać:

$$h = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \quad (5)$$

gdzie $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ jest pędem cząstki, \mathbf{A} potencjałem wektorowym. Operator nabra we współrzędnych cylindrycznych ma postać

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (6)$$

Uwzględniając fakt, iż nasz układ jest jednowymiarowy, oraz podstawiając przyjęty potencjał wektorowy otrzymujemy hamiltonian jednoelektronowy w postaci

$$h = \frac{1}{2mR^2} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 \quad (7)$$

gdzie $\Phi_0 = 2\pi\hbar/e$ jest kwantem strumienia magnetycznego. Funkcje własne dla takiego hamiltonianu pozostają takie same jak w przypadku nieuwzględniającym pola, natomiast energie własne zależą od całkowitego strumienia Φ w następujący sposób

$$\varepsilon_l = \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left(l - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2. \quad (8)$$

Widzimy tutaj wpływ pola magnetycznego na spektrum energii pojedynczego elektronu pomimo tego, iż elektron znajduje się poza obszarem działania pola magnetycznego. Zjawisko to jest czysto kwantowe i nosi nazwę efektu Aharonova-Bhoma [1]. Elektron przebywa w obszarze, w którym pola magnetycznego nie ma lecz reaguje na potencjał wektorowy, który nie znika tam gdzie znika pole. W fizyce klasycznej taki efekt nie występuje. Wzory (7) i (8) obowiązują również dla przypadku jednorodnego pola magnetycznego. Pole magnetyczne na zewnątrz pierścienia nie ma znaczenia dla stanów własnych elektronu.

1.3 PRZYPADEK DWÓCH ELEKTRONÓW

Hamiltonian dla pary elektronów ma postać:

$$H = h_1 + h_2 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r_{12}} \quad (9)$$

gdzie h_1, h_2 to hamiltoniany jednoelektronowe, ϵ_r jest przenikalnością względną GaAs (w obliczeniach przyjąłem $\epsilon_r = 12.9$), r_{12} to odległość pomiędzy elektronami. Trzeci człon odpowiada za oddziaływanie pomiędzy elektronami.

1.4 METODA ODZIAŁYWANIA KONFIGURACJI CI

Metoda oddziaływania konfiguracji służy do rozwiązywania równania Schrödingera układu wielu cząstek, w której funkcję falową przybliża się kombinacją liniową wyznaczników Slatera:

$$\Psi = \sum_{I=0} c_I \Phi_I = c_0 \Phi_0 + c_1 \Phi_1 + \dots \quad (10)$$

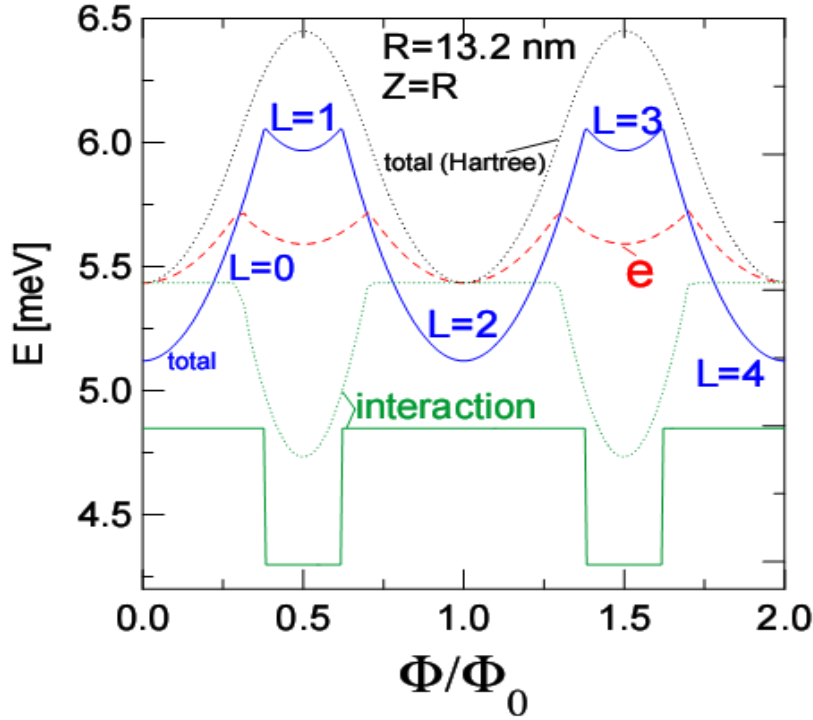
W celu uzyskania wartości współczynników c_I należy rozwiązać następujący macierzowy problem własny:

$$\mathbb{H}\mathbf{c} = \mathbf{e}\mathbb{S}\mathbf{c} \quad (11)$$

gdzie $\mathbb{H}_{ij} = \langle \Phi_i | H | \Phi_j \rangle$, $\mathbb{S}_{ij} = \langle \Phi_i | \Phi_j \rangle$, \mathbf{c} jest wektorem współczynników rozwinięcia, \mathbf{e} jest macierzą wartości własnych. W wyniku ortogonalności spinorbitali $\langle \Phi_i | \Phi_j \rangle = \delta_{ij}$, macierz \mathbb{S} sprowadza się, więc do macierzy jednostkowej. Dokładność przybliżenia zależy od ilości konfiguracji układu wziętych do przybliżenia. W przypadku wszystkich możliwych konfiguracji metoda ta daje rozwiązanie dokładne, lecz dla dużych układów wraz ze wzrostem liczby konfiguracji branych do przybliżenia gwałtownie rośnie czas obliczeń. W naszym przypadku ograniczyłem się do konfiguracji, dla których $L = l_1 + l_2$ przyjmuje wartości od -14 do +14. Funkcja falowa układu ma postać:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = & \sum_{l_1, l_2} a_{l_1 l_2} u_{l_1}(\rho_1, z_1, \phi_1) d_{l_2}(\rho_2, z_2, \phi_2) \\ & + \sum_{l_1, l_2} b_{l_1 l_2} d_{l_1}(\rho_1, z_1, \phi_1) u_{l_2}(\rho_2, z_2, \phi_2) \end{aligned} \quad (12)$$

gdzie $a_{l_1 l_2}, b_{l_1 l_2}$ są współczynnikami rozwinięcia, u_l oraz d_l to jednoelektronowe funkcje własne o momencie pędu równym $l\hbar$, które są zlokalizowane odpowiednio w górnym i dolnym pierścieniu



Rys. 4: Podobnie jak rys. 3, z tym, że dla $Z = R$. Przerywana czerwona linia odpowiada energii HF dla pojedynczego elektronu, wartość własna równań (21).

$$\begin{aligned}
 u_l &= \delta(\rho - R) \delta\left(z - \frac{Z}{2}\right) \frac{\exp(il\phi)}{\sqrt{2\pi}} \\
 d_l &= \delta(\rho - R) \delta\left(z + \frac{Z}{2}\right) \frac{\exp(il\phi)}{\sqrt{2\pi}}
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Dokładanie dodatkowych konfiguracji nie zwiększało dokładności otrzymywanych wyników, wobec czego w dalszej części pracy będę przyjmował, iż otrzymane w ten sposób wyniki są wynikami dokładnymi. Druga z sum (12) jest równa zero, ponieważ bierzmy pod uwagę jedynie taki przypadek, gdy elektrony znajdują się w dwóch różnych pierścieniach, wobec czego funkcje falowe jednoelektronowe są zawsze rozseparowane przestrzennie. Wówczas końcowa postać funkcji falowej jest następująca:

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{l_1 l_2} a_{l_1 l_2} u_{l_1}(\rho_1, z_1, \phi_1) d_{l_2}(\rho_2, z_2, \phi_2).
 \tag{14}$$

Hamiltonian (9) komutuje zarówno z operatorem parzystości jak i operatorem całkowitego momentu pędu, a przestrzenne części funkcji falowych mogą być symetryczne (singlet) bądź, antysymetryczne (tryplet) biorąc pod uwagę wymiennosc cząstek identycznych. W skutek całkowitej separacji pomiędzy pierścieniami pojawiają się degeneracje ze względu na spin i parzystość, co sprawia, że jedyną

istotną z naszego punktu widzenia liczbą kwantową jest całkowity moment pędu układu. Degeneracja ze względu na parzystość spowodowana jest brakiem tunelowania pomiędzy pierścieniami, natomiast degeneracje ze względu na spin brakiem przestrzennego nakładania się funkcji falowych obu elektronów. Problem degeneracji postaram się przybliżyć dla przypadku słabego oddziaływania (duże Z), dla którego konfiguracja mająca największe znaczenie w przyczynku do funkcji falowej może być prosto wskazana poprzez odnalezienie takiej, która posiada najmniejszą energię kinetyczną. Mianowicie w przypadku stanów o parzystym momencie pędu $2L$ funkcje falowe o najmniejszej energii są zbudowane z funkcji jednoelektronowych posiadających moment pędu L :

$$\psi_{\pm}^{2L} = \frac{[u_L(\mathbf{r}_1)d_L(\mathbf{r}_2) \pm d_L(\mathbf{r}_1)u_L(\mathbf{r}_2)]}{\sqrt{2}} \quad (15)$$

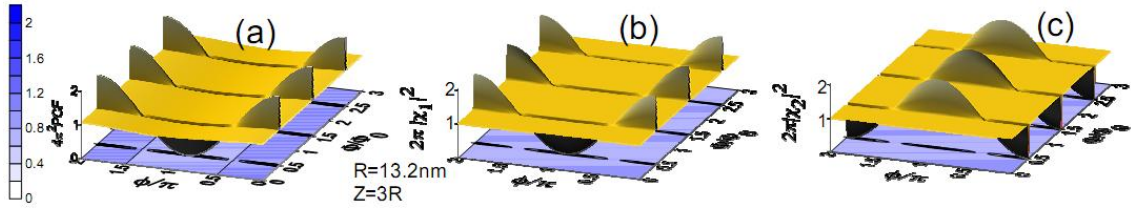
gdzie ψ_{+}^{2L} odpowiada singletowemu stanowi parzystemu, a ψ_{-}^{2L} trypletowemu stanowi nieparzystemu. Energie dla obu funkcji są zdegenerowane, jeżeli całka wymiany się zeruje, co jak wiemy w naszym przypadku jest spełnione. Stany o nieparzystym momencie pędu $2L + 1$ będą skonstruowane z funkcji jednoelektrodowych o momentach L oraz $L + 1$:

$$\begin{aligned} \Psi_1^{2L+1} &= (g_1 + g_2 + g_3 + g_4)/2, \\ \Psi_2^{2L+1} &= (g_1 - g_2 - g_3 + g_4)/2, \\ \Psi_3^{2L+1} &= (g_1 + g_2 - g_3 - g_4)/2, \\ \Psi_4^{2L+1} &= (g_1 - g_2 + g_3 - g_4)/2, \end{aligned} \quad (16)$$

gdzie

$$\begin{aligned} g_1 &= u_{L+1}(\mathbf{r}_1)d_L(\mathbf{r}_2), \\ g_2 &= u_L(\mathbf{r}_1)d_{L+1}(\mathbf{r}_2), \\ g_3 &= u_L(\mathbf{r}_2)d_{L+1}(\mathbf{r}_1), \\ g_4 &= u_{L+1}(\mathbf{r}_2)d_L(\mathbf{r}_1). \end{aligned} \quad (17)$$

Funkcja Ψ_1 odpowiada stanowi singletowemu i jest nieparzysta, ψ_2 stanowi singletowemu, lecz jest parzysta, ψ_3 i ψ_4 odpowiadają stanowi trypletowemu i są odpowiednio parzysta i nieparzysta. W przypadku opisywanym funkcjami ψ_2 i ψ_4 elektrony mają tendencję do wzajemnego unikania się, tzn. do przebywania po przeciwnych stronach pierścieni, natomiast dla ψ_1 i ψ_3 elektrony starają ustawić się jeden nad drugim. Drugi przypadek nigdy nie odpowiada stanowi podstawowemu naszego układu nie będzie, więc w dalszej części dyskutowany.



Rys. 5: (a) Funkcja korelacji par dla obliczeń dokładnych, przy stałej wartości położenia $\phi = \pi$ dla dolnego pierścienia w funkcji strumienia magnetycznego dla $R = 13.2 \text{ nm}$ i $Z = 3R$. (b) Gęstość ładunku dla elektronu znajdującego się w górnym pierścieniu uzyskana przy pomocy metody HF. (c) podobnie jak w (b) lecz dla elektronu znajdującego się w dolnym pierścieniu.

Dokładna funkcja falowa układu dwuelektronowego przy danym całkowitym momencie pędu L jest całkowicie niezależna od strumienia pola magnetycznego. Energia takiego układu wykazuje periodyczność wraz ze zmianą strumienia. Z powyższych rozważań wynika, iż skutkiem degeneracji ze względu na spin i parzystość funkcji falowej, oraz dla stałych wartości promieni pierścieni i odległości między nimi, korelacja pomiędzy elektronami zależy wyjątkowo od parzystości całkowitego momentu pędu układu L .

1.5 METODA HARTREE-FOCKA

Metoda Hartree-Focka (HF) jest jedną z najczęściej stosowanych metod przybliżonego rozwiązywania równania Schrödingera dla układu wielu cząstek oddziaływujących. Dzięki niej można wyliczyć energię oraz funkcję falową stanu podstawowego układu wielu cząstek wykorzystując model cząstek niezależnych. Przyjmuje się w nim funkcję falową układu w postaci wyznacznika Slatera zbudowanego z funkcji jednocząstkowych:

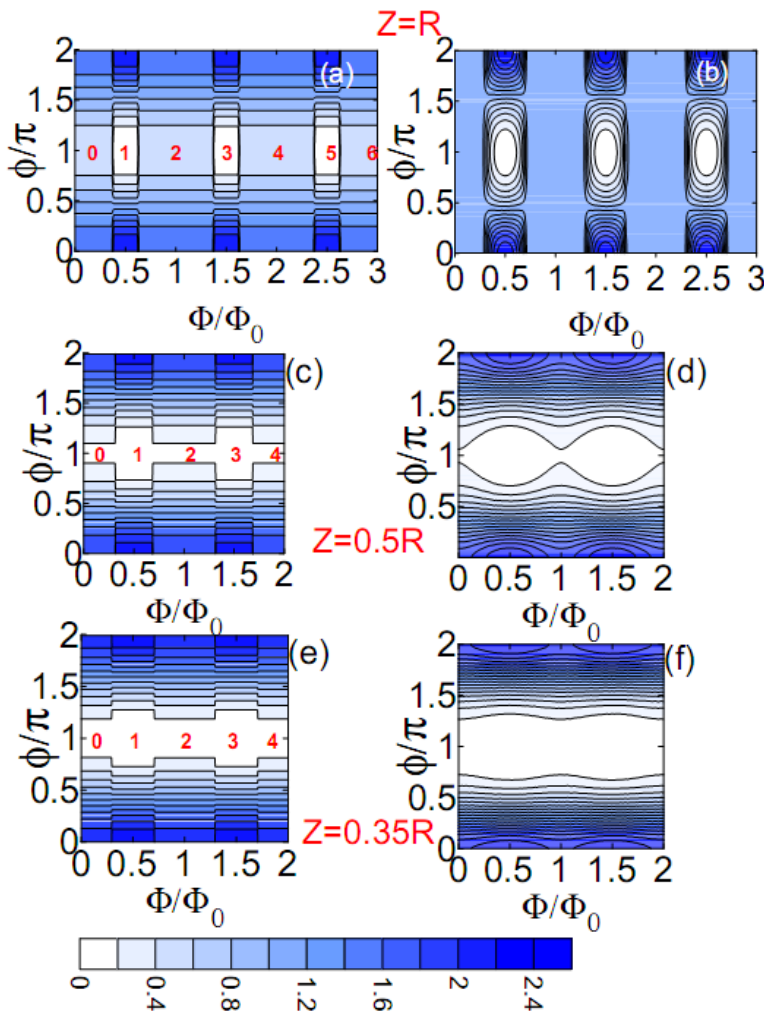
$$\psi(1, 2, \dots, N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_1(2) & \dots & \varphi_1(N) \\ \varphi_2(1) & \varphi_2(2) & \dots & \varphi_2(N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_N(1) & \varphi_N(2) & \dots & \varphi_N(N) \end{vmatrix}. \quad (18)$$

Jest to metoda iteracyjna korzystająca z zasady wariacyjnej mówiącej, że energia układu liczona, jako wartość oczekiwana hamiltonianu obliczona przy użyciu zupełnie dowolnej funkcji falowej jest zawsze większa lub równa energii stanu podstawowego. Zmieniając postać spinorbitali (funkcji jednocząstkowych w przypadku elektronów), w procesie iteracyjnym minimalizujemy wartość energii. Ponieważ jednoelektronowe funkcje falowe w naszym układzie są rozseparowane przestrzennie znika

oddziaływanie wymiany między elektronami, które wynika z antysymetrii funkcji (18) względem zamiany cząstek. Możemy bez żadnych konsekwencji dla fizycznie znaczących wielkości (energia, gęstość ładunku, funkcja korelacji par) zaniedbać antysymetryzację. Wtedy metoda HF redukuje się do metody Hartree, dla której funkcje falowe brane są w formie separowalnej,

$$\Psi_H = \delta(\rho_1 - R)\delta(z_1 - \frac{Z}{2})\chi_1(\phi_1) \times \delta(\rho_2 - R)\delta(z_2 + \frac{Z}{2})\chi_2(\phi_2) \quad (19)$$

gdzie χ_1 oraz χ_2 to funkcje jednoelektronowe odpowiadające odpowiednio górnemu



Rys. 6: (a,c,e) Wykresy przedstawiają funkcje korelacji par dla obliczeń dokładnych przy założeniu, że elektron w dolnym pierścieniu znajduje się w położeniu $\phi = \pi$. (b,d,f) Gęstość ładunku dla metody HF elektronu znajdującego się w górnym pierścieniu. Wszystkie wykresy odpowiadają przypadkowi, dla którego $R = 13.2$ nm.

i dolnemu pierścieniowi. Minimalizując wartość oczekiwaną hamiltonianu (9) przy użyciu funkcji jednoelektronowych

$$\begin{aligned}\frac{\delta \langle \Psi_{HF} | H | \Psi_{HF} \rangle}{\delta \chi_1} &= 0 \\ \frac{\delta \langle \Psi_{HF} | H | \Psi_{HF} \rangle}{\delta \chi_2} &= 0\end{aligned}\quad (20)$$

otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{aligned}\left(h_1 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int d\phi_2 \frac{|\chi_2(\phi_2)|^2}{r_{12}} \right) \chi_1(\phi_1) &= e_1 \chi_1(\phi_1) \\ \left(h_2 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int d\phi_1 \frac{|\chi_1(\phi_1)|^2}{r_{12}} \right) \chi_2(\phi_2) &= e_2 \chi_2(\phi_2)\end{aligned}\quad (21)$$

gdzie e_1 oraz e_2 to energie jednoelektronowe, które są równe w przypadku osiągnięcia samouzgodnienia. Pozwalając, aby funkcje χ_1 i χ_2 różniły się od stanów własnych momentu pędu powodujemy, iż odpowiadające im gęstości ładunku przestają posiadać symetrie kołową. Funkcje te liczyłem stosując metodę czasu urojonego, przyjmując losowy rozkład ładunków w obu pierścieniach na początku iteracji. Symetria kołowa jest odtwarzana w obliczeniach za każdym razem, kiedy odpowiada ona najlepszemu przybliżeniu tej metody.

Metoda czasu urojonego polega na podstawieniu do równania Schrödingera $i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = H\phi$, gdzie $\phi(x, t) = \sum_n C_n e^{-i(E_n/\hbar)t} \phi_n$ nowej zmiennej $t = -i\tau$. Dzięki temu pozbywamy się zarówno z równania Schrödingera jak i z funkcji falowej liczby urojonej, przyjmują one teraz postać:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = -\frac{H}{\hbar} \phi \quad (22)$$

$$\phi(x, \tau) = \sum_n C_n e^{-(E_n/\hbar)\tau} \phi_n. \quad (23)$$

Zastępując w równaniu (22) różniczkę różnicą skończoną wyprowadzamy wzór iteracyjny na funkcję falową:

$$\phi^j = (1 - \alpha H) \phi^{j-1} \quad (24)$$

gdzie $\alpha = \frac{\Delta\tau}{\hbar}$, dobór odpowiedniej wartości α decyduje o zbieżności.

Energię całkowitą układu szacujemy w następujący sposób:

$$E_{cal} = e_1 + e_2 - E_{od} \quad (25)$$

gdzie E_{od} jest energią oddziaływania wynoszącą:

$$E_{od} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int d\phi_2 \int d\phi_1 \frac{|\chi_1(\phi_1)|^2 |\chi_2(\phi_2)|^2}{r_{12}}. \quad (26)$$

2. WYNIKI

2.1 METODA CI

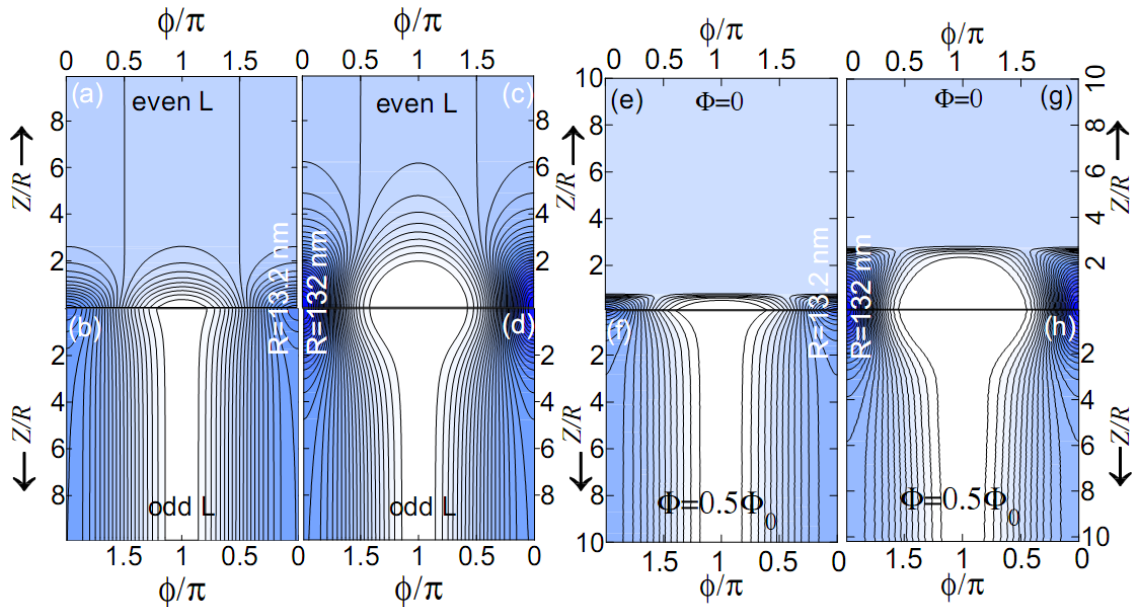
Na rys. 3 przedstawiłem spektrum energii dla mniejszej wartości Z z dwóch rozważanych w pracy promieni $R = 13.2$ nm przy relatywnie dużej odległości pomiędzy pierścieniami $Z = 3R$. Wartości dokładne energii na rysunku przedstawione są przy pomocy linii ciągłych oraz podpisane są wartością całkowitego momentu pędu układu L . Widzimy, że stan podstawowy układu realizowany jest głównie przez konfiguracje, dla których całkowity moment pędu przyjmuje wartości parzyste. Jedynie w okolicach, w których strumień magnetyczny przyjmuje nieparzyste wielokrotności połowy kwantu strumienia magnetycznego można zauważyć pojawienie się stanów o nieparzystej jego wartości. Sytuacja taka ma miejsce, ponieważ w przypadku nieparzystych wartości L elektrony wykazują tendencję do unikania się (starają znaleźć się po przeciwnych stronach pierścieni). Powodem tego jest korelacja pomiędzy elektronami związana z symetrią układu, która nie znika nawet w granicy $Z \rightarrow \infty$. W następstwie takiego stanu rzeczy mniejsza jest wartość energii oddziaływania, dzięki czemu w stanie podstawowym cyklicznie pojawiają się stany o nieparzystej wartości L . W przypadku gdyby energia oddziaływania była równa dla parzystych jak i nieparzystych wartości całkowitego momentu pędu w miejscach nieparzystych wielokrotności połowy kwantu strumienia magnetycznego występowałaby trzykrotna degeneracja stanu podstawowego [16].

Na rys. 4 przedstawiona jest podobna sytuacja, tym razem dla mniejszej odległości pomiędzy pierścieniami $Z = R$. Widzimy, że różnica pomiędzy energią oddziaływania dla stanów o parzystych i nieparzystych L jest większa niż w poprzednim przypadku, implikuje to pojawiania się w stanie podstawowym stanów o nieparzystych L dla dłuższych przedziałów zmienności strumienia.

Stany własne momentu pędu (które są jednocześnie funkcjami własnymi hamiltonianu (7)) posiadają niezmienną obrotową symetrię tak, więc do badania korelacji pomiędzy elektronami używałem funkcji korelacji par [28] :

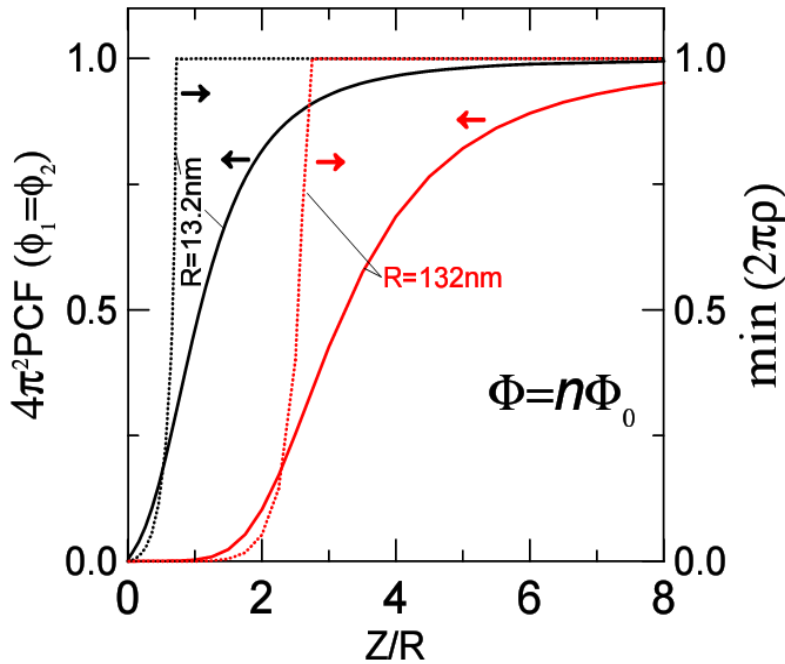
$$\text{PCF}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = |\psi(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)|^2 + |\psi(\mathbf{r}_b, \mathbf{r}_a)|^2 \quad (27)$$

która w wyniku daje gęstość prawdopodobieństwa znalezienia elektronów w położeniach \mathbf{r}_a oraz \mathbf{r}_b . W celu prześledzenia zachowania się PCF ustaliłem położenie jednego z elektronów w dolnym pierścieniu ($z_a = -Z/2$ odpowiadającego



Rys. 7: (a-d) Funkcja korelacji par dla obliczeń dokładnych przy założeniu, że elektron w dolnym pierścieniu znajduje się w położeniu $\phi = \pi$ w funkcji odległości pomiędzy pierścieniami dla $R = 13.2$ nm (a,b), oraz $R = 132$ nm (c,d). Wykresy (a,c) odpowiadają stanom dla parzystych L , natomiast (b,d) dla nieparzystych. (e-h) Gęstość ładunku dla stanu podstawowego metody HF elektronu znajdującego się w górnym pierścieniu w funkcji odległości pomiędzy pierścieniami dla $R = 13.2$ nm (e,f), oraz $R = 132$ nm (g,h). Wykresy (e,g) odpowiadają przypadkowi dla parzystej wielokrotności połowy kwantu strumienia magnetycznego, a (f,h) nieparzystym wielokrotnościom.

\mathbf{r}_a) w położeniu $\phi_a = \pi$, a następnie obserwowałem zachowanie się funkcji korelacji par w zależności od wartości ϕ_b . W granicy słabego oddziaływania (duże Z) i dla nieparzystych L funkcja korelacji par (PCF) zarówno dla Ψ_+ oraz Ψ_- wynosi $\text{PCF}(\phi_a, \phi_b) = |d_L(\mathbf{r}_a)u_L(\mathbf{r}_b)|^2/2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2$. Jak widzimy nie zależy ona od położenia elektronów, wobec czego elektrony w tym wypadku są całkowicie nieskorelowane. Sprawa ma się nieco inaczej, jeżeli popatrzymy na stany odpowiadające nieparzystym wartościom L , opisywane są one funkcjami Ψ_2 oraz Ψ_4 dla których uzyskujemy $\text{PCF}(\phi_a, \phi_b) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 [1 - \cos(\phi_a - \phi_b)]$. W tym przypadku elektrony nie mogą znajdować się jeden nad drugim. Na rys. 5(a) przedstawiony jest wykres funkcji korelacji par dla stanu podstawowego w zależności od strumienia magnetycznego. Widać na rysunku, iż PCF nie jest ściśle stała dla parzystych L jakby to wynikało z obliczeń dla przypadku słabego oddziaływania, lecz posiada płytkie minimum. Spowodowane jest to niezerowym wkładem do funkcji falowej konfiguracji innych niż te znajdujące się w równaniu (15). W przypadku L nieparzystych widzimy dobre przybliżenie dokładnej PCF przez powyższą analityczną wartość, dla kąta $\phi = \pi$ pozostaje ono równe zero nawet przy dodaniu



Rys. 8: Liniami ciągłymi zaznaczone są wartości PCF dla stanu podstawowego o parzystych L w przypadku, gdy elektrony zlokalizowane są jeden nad drugim w funkcji odległości między pierścieniami. Linie przerywane odpowiadają minimalnym wartościom gęstości ładunku wyliczonej przy pomocy przybliżenia HF dla całkowitych wielokrotności połowy kwantu strumienia magnetycznego.

większej liczby konfiguracji niż te użyte w (16). Na rys. 6(a) przedstawiona jest funkcja korelacji par dla $Z = R$, widzimy, że dla parzystych wartości L korelacje pomiędzy elektronami wzrosły w porównaniu z przypadkiem, dla którego $Z = 3R$. Jeżeli nadal zmniejszamy wartość Z widzimy, że PCF dla obu przypadków L zaczynają być coraz bardziej podobne (patrz rys. 6(c) dla $Z = 0.5R$ oraz 6(e) dla $Z = 0.35R$). Rysunki 7 (a-d) przedstawiają PCF dla parzystych i nieparzystych L oraz obu rozważanych promieni ($R = 13.2$ nm i $R = 132$ nm) w zależności od odległości pomiędzy promieniami. W granicy $Z = 0$ funkcje korelacji par dla przypadku parzystego i nieparzystego L stają się identyczne, powoduje to oddziaływanie kulombowskie, które zapobiega pojawieniu się elektronów jeden nad drugim. Przy dużych wartościach Z zarówno w przypadku parzystych jak i nieparzystych L widzimy brak zależności PCF od promienia R . Wystarczy jednak zbliżyć się z odległością Z do zera, aby różnica w zachowaniu się PCF w zależności od R była wyraźna. W przypadku większego z promieni obszar, dla którego funkcja korelacji par jest równa bądź bliska zero znacznie się zwiększa, gdy Z dąży do zera, natomiast dla mniejszego z promieni zmiana ta jest nieznaczna. Jest to oczywistą konsekwencją faktu, iż dla $R = 132$ nm elektrony mają po prostu więcej miejsca na to, aby się unikać.

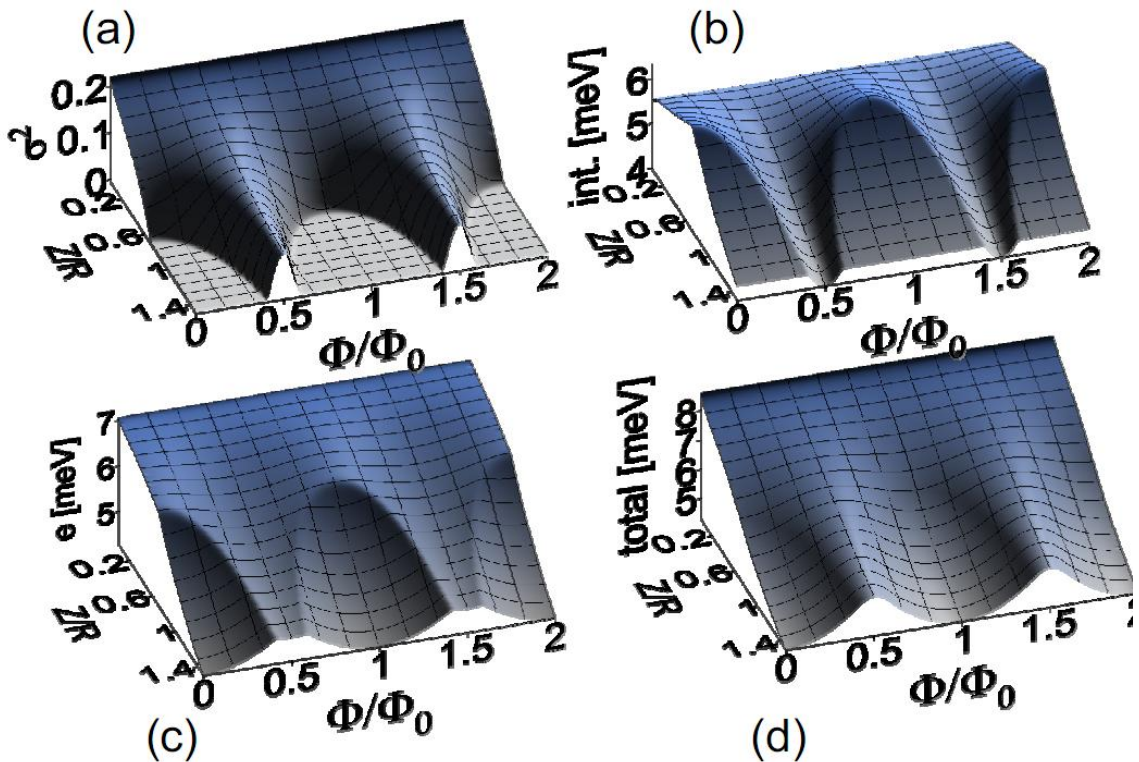
Rysunek 8 przedstawia wykres PCF dla stanów o parzystych wartościach L i elektronów zlokalizowanych jeden nad drugim dla obydwu omawianych promieni w funkcji odległości pomiędzy pierścieniami. W przypadku stanów o nieparzystych L wartość ta jest równa zero. W przypadku większego promienia $R = 132$ nm prawdopodobieństwo znalezienia elektronów jeden nad drugim staje się nieistotne już dla $Z = R$, lecz dla przypadku $R = 13.2$ nm można je zaniedbać dopiero w przypadku, gdy Z zmierza do zera.

2.2 PRZYBLIŻENIE HF

Energia całkowita stanu podstawowego naszego układu dla promienia $R = 13.2$ nm i $Z = 3R$ przedstawiona jest na rys. 3 czarną linią przerywaną. Jest ona niemalże identyczna z dokładną wartością energii całkowitej dla rejonów odpowiadających parzystym wartościom L , podobnie sprawa się ma z energią oddziaływania (zielona linia przerywana). W rejonach natomiast odpowiadających nieparzystym L energia obliczona przy pomocy przybliżenia HF jest nieznacznie zawyżona w stosunku do energii dokładnej układu (zawyżenie energii oddziaływania przekłada się na zawyżenie energii całkowitej). Związane jest to z tym, iż dokładna energia oddziaływania jest nieciągłą funkcją strumienia magnetycznego (patrz spadki energii w okolicach nieparzystych wielokrotności $\Phi_0/2$), a ciągła jest jedynie

całkowita energia dokładna. Sprawa ma się inaczej, jeżeli popatrzymy na energię oddziaływania metody HF, jest ona ciągłą funkcją strumienia, jest to powodem, dla którego minima metody przybliżonej są płytsze.

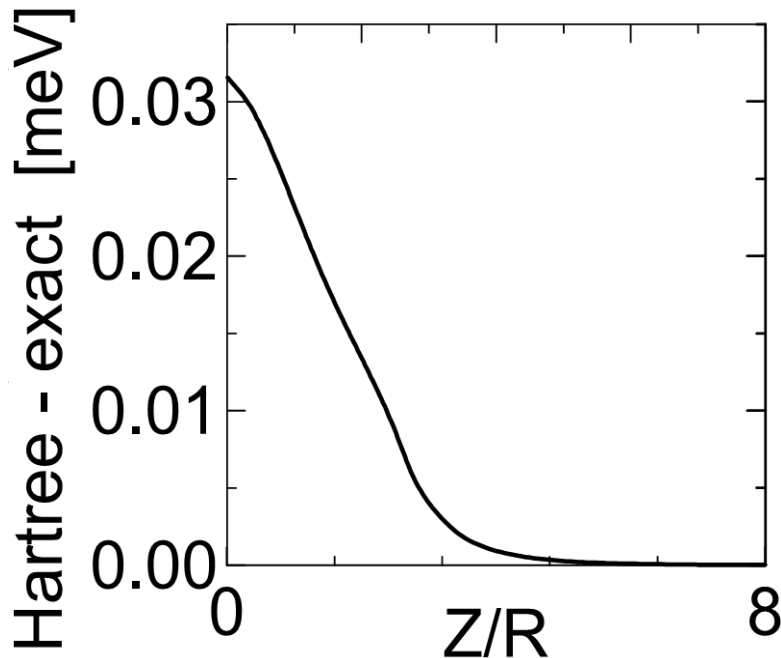
Funkcja korelacji par obliczona dla naszej funkcji falowej użytej w metodzie HF Ψ_H (19) wynosi $PCF(\phi_1, \phi_2) = |\chi_1(\phi_1)|^2 |\chi_2(\phi_2)|^2$. Widzimy, więc, że PCF w tym przypadku jest iloczynem gęstości ładunków obu elektronów. Jednoelektronowe funkcje falowe χ_1 oraz χ_2 mogą bądź to zbliżyć się postacią do jednoelektronowych funkcji własnych momentu pędu (odtworzyć ich symetrię kołową), wówczas korelacje pomiędzy elektronami są zaniedbywane, bądź też odstępować od symetrii, dzięki czemu będą w stanie opisywać korelacje układu. Gęstości ładunków metody HF pokazane są na rys. 5 ((b) – elektron znajdujący się w górnym pierścieniu, (c) – elektron znajdujący się w pierścieniu dolnym), dla $R = 13.2$ nm i $Z = R$. Widzimy, że gęstości ładunków są stałe dla prawie całego przedziału zmienności strumienia Φ (zachowują symetrię), jednak w okolicach nieparzystych wielokrotności $\Phi_0/2$, symetria ta zostaje złamana i gęstości ładunków wówczas są przesunięte względem siebie o kąt π $|\chi_1(\phi)|^2 = |\chi_2(\phi + \pi)|^2$. Wykres



Rys. 9: (a) Wariacja odchylenia jednoelektronowej gęstości ładunku od symetrii kołowej, wzór (28). (b) Energia oddziaływania. (c) Energia pojedynczego elektronu. (d) Energia całkowita układu. Wyniki otrzymane dla przybliżenie HF w przypadku $R = 13.2$ nm.

odpowiadający górnemu pierścieniowi jest bardzo podobny do dokładnej funkcji korelacji par (rys. 5(a)). Jediną różnicą jest fakt, iż w przypadku dokładnej PCF tylko w przybliżeniu jest ona stała dla obszarów odpowiadających stanom o parzystych wartościach całkowitego momentu pędu, gdzie w przypadku metody przybliżonej jest ona stała.

Rysunek 4 przedstawia porównanie dokładnej energii całkowitej stanu podstawowego z energią całkowitą metody przybliżonej (podobnie jak w przypadku rys. 3, lecz tym razem dla $Z = R$). Energia metody przybliżonej jest znacznie zawyżona w porównaniu z energią dokładną, szczególnie w okolicach nieparzystych wielokrotności $\Phi_0/2$, gdzie w rozwiązaniu dokładnym odpowiadają stany o nieparzystych L i na wykresie energii występują „dołki” z tym związane. Natomiast energia przybliżona jest „gładką” funkcją strumienia. Dodatkowo przedstawiłem na rys. 4 energię przybliżoną



Rys. 11: Nadwyżka energii całkowitej metody przybliżonej ($E_{t,HF} - E_{t,CI}$) dla $R = 132$ nm i Φ będącego całkowitą wielokrotnością Φ_0 .

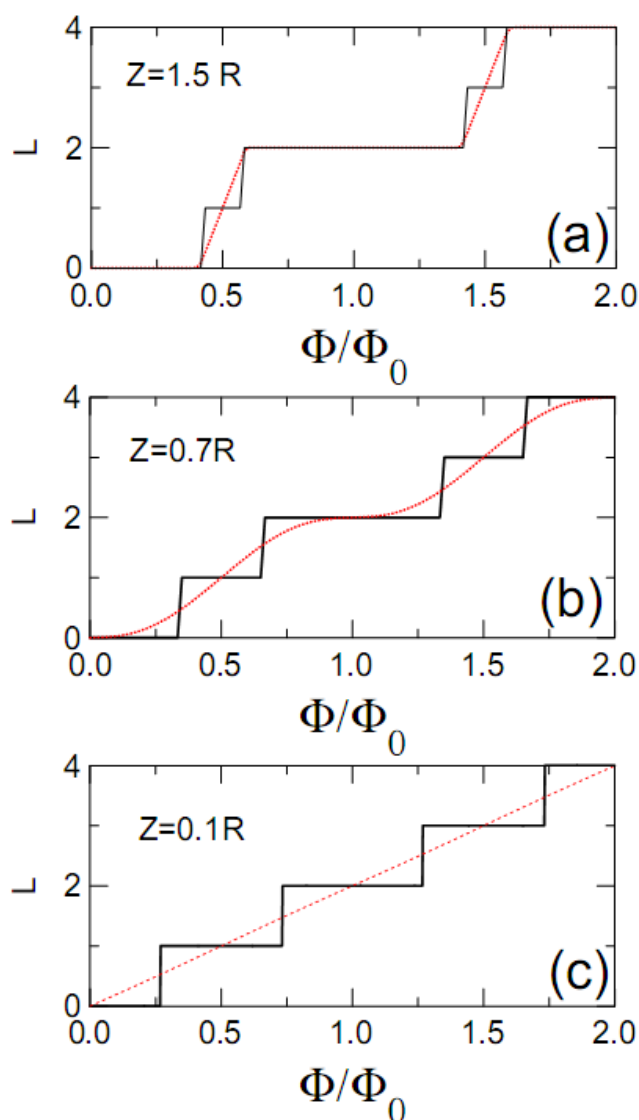
pojedynczego elektronu (czerwona linia przerywana), w której owe „dołki” występują w momentach, których symetria gęstości ładunku jest łamana, lecz po wyliczeniu energii całkowitej funkcja nabiera gładkich kształtów. Warty zwrócenia uwagi jest fakt, iż przedziały, dla których symetria układu w metodzie przybliżonej jest łamana są większe niż odpowiadające im przedziały, dla których dokładny stan podstawowy realizowany jest przez konfiguracje o nieparzystej wartości całkowitego momentu pędu układu. Wykres (b) na rys. 6 przedstawia gęstość ładunku dla górnego pierścienia w przypadku $Z = R$. Porównując go z podobnym wykresem (6(a) PCF rozwiązania dokładnego) widzimy, że w obu przypadkach korelacja pomiędzy

elektronami rośnie w okolicach nieparzystych wielokrotności $\Phi_0/2$, pojawia się wówczas dziura kulombowska (w wyniku oddziaływania elektrostatycznego elektrony nie mogą być zlokalizowane jeden nad drugim), natomiast jest duże prawdopodobieństwo znalezienia elektronów po przeciwnych stronach pierścieni ($\phi_1 = \phi_2 + \pi$). Wraz ze zmniejszaniem odległości pomiędzy pierścieniami Z przedziały, dla których symetria jest łamana powiększają się, aż w pewnym momencie ($R = 13.2$ nm $Z = 0.7R$ oraz $Z = 2.8R$ dla $R = 132$ nm) symetria łamana jest już dla każdej wartości strumienia Φ . Sytuacja ta dla przypadku $R = 13.2$ nm zilustrowana jest na rysunku 6(d) dla $Z = 0.5R$ oraz 6(f) dla $Z = 0.35R$. Widzimy, że wielkość dziury kulombowskiej oscyluje wraz ze zmianą strumienia, przyjmując maksimum dla nieparzystych wielokrotności $\Phi_0/2$, a minima dla parzystych. Amplituda tych oscylacji maleje wraz ze zmniejszaniem odległości Z , aż w granicy $Z = 0$ w całym przedziale zmienności Φ gęstość ładunku przyjmuje takie same wartości. Wykresy na rysunku 7 przedstawiają zachowanie się gęstości ładunku w zależności od odległości pomiędzy pierścieniami dla strumienia równego $\Phi = n\Phi_0$ (e,g), dla którego dziura kulombowska, jeżeli się pojawia przyjmuje swojej minimum, oraz $\Phi = \left(n + \frac{1}{2}\right)\Phi_0$, gdzie $n = 1,2,3, \dots$ dla którego dziura przyjmuje swoje maksimum. Gwałtowność z jaką symetria zostaje złamana w przypadku metody przybliżonej można zaobserwować na rys. 8, czarna przerywana linia odpowiada $R = 13.2$ nm, natomiast czerwona przerywana $R = 132$ nm. W obu przypadkach widzimy nagły spadek prawdopodobieństwa znalezienia się elektronów jeden nad drugim (co w przypadku metody HF jest równoważne nagłemu złamaniu symetrii). Stopień odchylenia gęstości ładunku pojedynczego elektronu od symetrii (z symetrii wynika, że $|\chi(\phi)|^2 = \frac{1}{2\pi}$) można przebadać przy pomocy wariancji

$$\sigma^2 = \int_0^{2\pi} \left(|\chi(\phi)|^2 - \frac{1}{2\pi} \right)^2 d\phi. \quad (28)$$

Zależność wariancji od odległości między pierścieniami Z oraz strumienia magnetycznego Φ dla $R = 13.2$ nm przedstawiona jest na rysunku 9(a). Symetria przy dużych wartościach Z jest zachowana w prawie całym przedziale zmienności strumienia (jedynie w okolicach nieparzystych wielokrotności $\Phi_0/2$ wariancja σ^2 jest różna od zera). Po przekroczeniu granicy $Z = 0.7R$ widzimy, że wariancja dla każdej wartości strumienia jest różna od zera (symetria łamana jest wszędzie). Wykres 7(b) natomiast przedstawia energię oddziaływania pomiędzy elektronami, na którym widzimy, iż tam gdzie symetria przestaje być łamana, metoda HF zaczyna jakościowo dobrze przybliżać energię oddziaływania (choć jest ona dla przypadku $R = 13.2$ nm już dość znacznie zawyżona), tam natomiast gdzie symetria jest łamana przybliżenie

nawet jakościowe jest marne, funkcja powinna zmieniać się w sposób nieciągły i w każdym z przedziałów przyjmować stałe wartości, natomiast widzimy, że tam gdzie symetria jest łamana jest gładką funkcją strumienia. Złamanie symetrii niesie za sobą również rozszczepienie energii, które możemy zaobserwować na rysunku 10, jest to wykres energii jednoelektronowej, oddziaływania, oraz energii całkowitej układu dla $R = 132$ nm oraz całkowitych wielokrotności Φ_0 . Wszystkie trzy energie są identyczne dla $Z > 2.8R$ (wówczas gęstości ładunków nie łamią jeszcze symetrii), natomiast dla $Z < 2.8R$ złamaniu symetrii towarzyszy rozszczepienie tych trzech energii. Na rysunku 11 przedstawiłem różnicę pomiędzy energią całkowitą metod HF oraz CI dla $R = 132$ nm, widać, że zawyżanie energii przez metodą przybliżoną jest najwyższe w granicy $Z = 0$, natomiast dla dużych odległości pomiędzy pierścieniami dąży do zera.



Rys. 12: Całkowity moment pędu układu dla rozwiązania dokładnego (linie ciągłe), oraz dla przybliżenia średniego pola (linie przerywane) dla $R = 13.2$ nm i różnych odległości: (a) $Z = 1.5R$, (b) $Z = 0.7R$, (c) $Z = 0.1R$.

Na koniec chciałem przedstawić zależność całkowitego momentu pędu dla obu rozwiązań, rysunek 12 przedstawia wykresy momentu pędu dla obu metod przy $R = 13.2 \text{ nm}$ i różnych odległościach Z . Wykres 12(a) wykreślony jest dla $Z = 1.5R$, widzimy, że w miejsca gdzie symetria nie jest łamana metoda przybliżona pokrywa się z rozwiązaniem dokładnym, lecz w miejscach gdzie symetria się załamuje (okolice nieparzystych wielokrotności $\Phi_0/2$, dla których dokładna wartość momentu pędu przyjmuje wartości nieparzyste) moment pędu metody HF zmienia się w sposób liniowy pokrywając się jedynie z rozwiązaniem dokładnym dla $\Phi = (n + \frac{1}{2})\Phi_0$, gdzie $n = 1, 2, 3 \dots$. Wykres 12(b) przedstawia przypadek przy $Z = 0.7R$ dla którego symetria jest już łamana w całym przedziale zmienności Φ , moment pędu metody HF jest stały w tym przypadku jedynie w okolicach całkowitych wielokrotności Φ_0 . Ostatni wykres (c) na rysunku 12 przedstawia przypadek dla $Z = 0.1R$, widzimy, że moment pędu metody przybliżonej rośnie liniowo w całym przedziale zmienności strumienia Φ i przyjmuje wartości zgodne z rozwiązaniem dokładnym jedynie dla całkowitych wielokrotności $\Phi_0/2$.

PODSUMOWANIE

W pracy przestudiowałem zachowanie pary elektronów umieszczonych w dwóch pierścieniach kwantowych (w każdym pierścieniu po jednym elektronie) rozważając jedynie oddziaływanie kulombowskie, cały układ zanurzony był w jednorodnym polu magnetycznym. Porównałem dwa podejścia numeryczne do tego problemu: metodę mieszania konfiguracji (CI), której wyniki przyjąłem jako wyniki dokładne, oraz metodę pola samouzgodnionego (HF). Przestrzenne korelacje pomiędzy elektronami (tzn. przedziały zmienności strumienia magnetycznego, dla których elektrony unikają znalezienia się jeden nad drugim) podlegają oscylacjom w funkcji strumienia pola magnetycznego przenikającego przez pierścienie. W stanie podstawowym dla przypadku, gdy całkowity moment pędu przyjmuje wartości nieparzyste elektrony nie mogą się zlokalizować jeden nad drugim, taki stan rzeczy wymusza symetria układu i własność ta się nie zmienia wraz ze zwiększaniem odległości pomiędzy pierścieniami, zawęża się jedynie przedział strumienia magnetycznego wokół nieparzystych wielokrotności $\Phi_0/2$, dla którego stan podstawowy realizowany jest przez konfigurację o nieparzystym momencie pędu. W przypadku, gdy całkowity moment pędu przyjmuje wartości parzyste zakazu takiego nie ma i dla odpowiednio dużej odległości pomiędzy pierścieniami elektrony mają możliwość zlokalizowania się w tym samym położeniu. Amplituda oscylacji, które dotyczą funkcji korelacji par maleje wraz ze zmniejszaniem się odległości pomiędzy pierścieniami i w granicy $Z = 0$ oscylacje zanikają.

Metoda HF, aby odtworzyć sytuację odpowiadającą nieparzystym wartościom całkowitego momentu pędu łamie symetrię (funkcje falowe jednoelektronowe przestają być stanami własnymi momentu pędu), w następstwie czego metoda ta nie potrafi odtworzyć poprawnej wartości momentu pędu układu. Całkowity moment pędu układu wyliczony przy pomocy metody przybliżonej w sytuacji gdy dokładne jego wartości są nieparzyste zmienia się liniowo w całym przedziale zmienności strumienia odpowiadającemu danej sytuacji i jest równy wartości dokładnej jedynie w punktach odpowiadających nieparzystym wielokrotnościom $\Phi_0/2$.

LITERATURA

- [1] Y. Aharonov oraz D. Bohm, Phys. Rev. **115**, 485 (1959).
- [2] R. A. Webb, S. Washburn, C. P. Umbach, oraz R. B. Laibowitz, Phys. Rev. Lett. **54**, 2696 (1985).
- [3] G. Timp, A. M. Chang, J. E. Cunningham, T. Y. Chang, P. Mankiewich, R. Behringer, oraz R. E. Howard, Phys. Rev. Lett. **58**, 2814 (1987); W. G. van der Wiel, Yu. V. Nazarov, S. De Franceschi, T. Fujisawa, J. M. Elzerman, E. W. G. M. Huizeling, S. Tarucha, oraz L. P. Kouwenhoven, Phys. Rev. B **67**, 033307 (2003).
- [4] M. Büttiker, Y. Imry, oraz M. Y. Azbel, Phys. Rev. A **30**, 1982 (1984).
- [5] T. Chakraborty oraz P. Pietiläinen, Phys. Rev. B **50**, 8460 (1994); A. O. Govorov, S. E. Ulloa, K. Karrai, oraz R. J. Warburton, *ibid.* **66**, 081309(R) (2002); J. I. Climente, J. Planelles, oraz J. L. Movilla, *ibid.* **70**, 081301(R) (2004).
- [6] V. Chandrasekhar, R. A. Webb, M. J. Brady, M. B. Ketchen, W. J. Gallagher, oraz A. Kleinsasser, Phys. Rev. Lett. **67**, 3578 (1991).
- [7] D. Mailly, C. Chapelier, oraz A. Benoit, Phys. Rev. Lett. **70**, 2020 (1993).
- [8] A. Lorke, R. J. Luyken, A. O. Govorov, J. P. Kotthaus, J. M. Garcia, oraz P. M. Petroff, Phys. Rev. Lett. **84**, 2223 (2000).
- [9] N. A. J. M. Kleemans, I. M. A. Bominaar-Silkens, V. M. Fomin, V. N. Gladilin, D. Granados, A. G. Taboada, J. M. Garcia, P. Offermans, U. Zeitler, P. C. M. Christianen, J. C. Maan, J. T. Devreese, oraz P. M. Koenraad, Phys. Rev. Lett. **99**, 146808 (2007).
- [10] D. Granados, J. M. García, T. Ben, oraz S. I. Molina, Appl. Phys. Lett. **86**, 071918 (2005).
- [11] V. M. Fomin, V. N. Gladilin, S. N. Klimin, J. T. Devreese, N. A. J. M. Kleemans, oraz P. M. Koenraad, Phys. Rev. B **76**, 235320 (2007); Y. V. Pershin oraz C. Piermarocchi, *ibid.* **72**, 125348 (2005).

- [12] L. K. Castelano, G.-Q. Hai, B. Partoens, oraz F. M. Peeters, *Phys. Rev. B* **74**, 045313 (2006); G. Piacente oraz G. Q. Hai, *J. Appl. Phys.* **101**, 124308 (2007); L. G. G. V. Dias da Silva, J. M. Villas-Bôas, oraz S. E. Ulloa, *Phys. Rev. B* **76**, 155306 (2007).
- [13] T. Kuroda, T. Mano, T. Ochiai, S. Sanguinetti, K. Sakoda, G. Kido, oraz N. Koguchi, *Phys. Rev. B* **72**, 205301 (2005); T. Mano, T. Kuroda, S. Sanguinetti, T. Ochiai, T. Tateno, J. Kim, T. Noda, M. Kawabe, K. Sakoda, G. Kido, oraz N. Koguchi, *Nano Lett.* **5**, 425 (2005); B. Szafran oraz F. M. Peeters, *Phys. Rev. B* **72**, 155316 (2005); F. Malet, M. Pi, M. Barranco, E. Lipparini, oraz L. Serra, *ibid.* **74**, 193309 (2006); J. I. Climente, J. Planelles, M. Barranco, F. Malet, oraz M. Pi, *ibid.* **73**, 235327 (2006); A. Mühle, W. Wegscheider, oraz R. J. Haug, *Appl. Phys. Lett.* **91**, 133116 (2007).
- [14] K. H. Ahn oraz P. Fulde, *Phys. Rev. B* **62**, R4813 (2000).
- [15] A. Fuhrer, S. Lüscher, T. Ihn, T. Heinzel, K. Ensslin, W. Wegscheider, oraz M. Bichler, *Nature (London)* **413**, 822 (2001).
- [16] K. Niemiälä, P. Pietiläinen, P. Hyvönen, oraz T. Chakraborty, *Europhys. Lett.* **36**, 533 (1996).
- [17] S. M. Reimann oraz M. Manninen, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 1283 (2002).
- [18] V. M. Fomin, V. N. Gladilin, J. T. Devreese, N. A. J. M. Kleemans, oraz P. M. Koenraad, *Phys. Rev. B* **77**, 205326 (2008).
- [19] P. Földi, O. Kálmán, M. G. Benedict, oraz F. M. Peeters, *Nano Lett.* **8**, 2556 (2008); O. Kálmán, P. Földi, M. G. Benedict, oraz F. M. Peeters, *Phys. Rev. B* **78**, 125306 (2008).
- [20] B. Szafran, *Phys. Rev. B* **77**, 205313 (2008).
- [21] F. Suárez, D. Granados, M. L. Dotor, oraz J. M. García, *Nanotechnology* **15**, S126 (2004).
- [22] Y.Li oraz H.S. Lu, *J. Phys. Soc. Jpn.* **43**, 2014 (2004).
- [23] Y.Li, *J. Comput. Electronics* **4**, 135 (2005).
- [24] J. Planelles oraz J.I. Climente, *Eur. Phys. J. B* **48**, 65 (2005).
- [25] F. Malet, M. Pi, M. Barranco, E. Lipparini oraz L. Serra, *Phys. Rev. B* **74**, 193309 (2006).

- [26] L.K. Castellano, G.-Q. Hai, B. Partoens, oraz F.M. Peeters, Phys. Rev. B **74**, 045313 (2006); Braz. J. Phys. **36**, 936 (2006).
- [27] J.H. Marin, F. García, oraz I.D. Mikhailov, Braz. J. Phys. **36**, 940 (2006).
- [28] P.A. Maksym, H. Imamura, G.P. Mallon, H. Aoki, J. Phys. Condens. Matt. **12**, R299 (2000).
- [29] S. Viefers, P. Koskinen, P. Singha Deo, M Manninen, Physica E **21**, (2004) 1-35
- [30] B. Szafran, S. Bednarek, M. Dudziak, Phys. Rev. B **75**, 235323 (2007)