Projekt C 6.8
Solitony 2D „sinus – Gordona”

Wstęp.

O ciekawym zjawisku z działu fizyki nieliniowej i fizyki fal - **solitonach** jest mowa w projekcie B3.1. Rozwiązany jest tam problem jedno-wymiarowy.
W tym projekcie zadaniem jest zasymulowanie propagacji solitonu dwuwymiarowego opisanego równaniem **sinus Gordona** (*sine – Gordon equations- **sG***) .
Równanie to pochodzi z teorii pola, i ma postać:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sin u \qquad (1)$$

Może ono opisywać między innymi tunelowanie par Coopera przez złącze Josephsona .

Algorytm:

Przyjmijmy kwadratowy obszar obliczeń S(x,y), $x \in (-x_0, x_0)$, $y \in (-x_0, x_0)$, oraz czas t>0
Na tym obszarze zdefiniujmy siatkę NxN punktów. Krok siatki: $\Delta = 2x_0/(N-1)$.
Współrzędne punktów na siatce.

$$x = m\,\Delta, \quad y = k\,\Delta, \quad t = n\,\delta, \quad \text{gdzie } \delta \text{ - krok czasowy.} \qquad (2)$$
$$k = 1,2...N, \quad m=1,2....N$$

Wprowadźmy oznaczenie:

$$u(x, y, t) = u(m\Delta, k\Delta, n\delta) = u^n_{mk} \qquad (3)$$

Dyskretyzacja drugiej pochodnej
po zmiennych przestrzennych:

$$\frac{\partial^2 u^n_{mk}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n_{mk}}{\partial y^2} = \frac{u^n_{mk-1} + u^n_{mk+1} - 4u^n_{mk} + u^n_{m-1k} + u^n_{m+1k}}{\Delta^2} + O(\Delta^4) \quad (4)$$

Po zmiennej czasowej:

$$\frac{\partial^2 u^n}{\partial t^2} = \frac{u^{n+1} + u^{n-1} - 2u^n}{\delta^2} + O(\delta^4)$$

stąd $u^{n+1} = 2u^n - u^{n-1} + \delta^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}^n + O(\delta^4)$ (5)

Z kolei z równania (1) mamy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}^n = \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} - \sin u^n \qquad (6)$$

po połączeniu (4), (5) i (6):

$$u^{n+1}_{mk} = -u^{n-1}_{mk} + 2\left[1 - 2\left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^2\right]u^n_{mk} + \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^2 (u^n_{m-1k} + u^n_{m+1k} + u^n_{mk-1} + u^n_{mk+1}) - \qquad (7)$$
$$\delta^2 \sin(u^n_{m-1k} + u^n_{m+1k} + u^n_{mk-1} + u^n_{mk+1})$$

I jest to gotowe do obliczeń równanie.
Pozostaje problem warunków brzegowych.

1. Warunek początkowy kształt początkowy: u^0 , prędkość początkowa $\frac{\partial u^0}{\partial t}$
2. Warunek na brzegu obszaru:
   wartości funkcji : $u|_n$, lub
   pochodnych prostopadłych do brzegu $\partial u/\partial n$

Cel pracy:

1. Napisać program symulujący propagację solitonu.
   Przyjąć $\Delta = \sqrt{2}\,\delta$ - dobra stabilność, łatwiejsza implementacja (przekształcić (7)!)

warunki brzegowe:

$$\frac{\partial u^n}{\partial n} = 0 \rightarrow \quad u^n_{m0} = u^n_{m1}, u^n_{0k} = u^n_{1k}, u^n_{mN} = u^n_{mN-1}, u^n_{Nk} = u^n_{N-1k} .$$

Program powinien mieć możliwość wyboru funkcji rozkładu początkowego.

Przyjąć $\frac{\partial u^0}{\partial t} = 0 \rightarrow u^1_{mk} = u^0_{mk}$

2. Przebadać zachowanie dla warunków początkowych:
   a) $u^0 = 4\arctan\exp(\sqrt{x^2+y^2})$
   b) $u^0 = 4\arctan\frac{\exp x + \exp y}{1+\exp(x+y)}$
      - zachowanie kształtu

Należy narysować kształt solitonu dla n=0, 10, 20, 50.
Można wykorzystać takie narzędzia jak surfer czy gnuplot, lub samemu zrobić interfejs graficzny.

- zachowanie energii $E^n = E_p + E_k = \int_S dxdy\left(\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]^2 - \cos u\right)$

Całkę zamieniamy na sumę:

$$E^n = \sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{u^n_{mk+1} + u^n_{m+1k} - u^n_{mk-1} - u^n_{m-1k}}{2\Delta}\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{u^{n-1}_{mk} - u^{n+1}_{mk}}{2\delta}\right]^2 - \cos u^n_{mk}\right\}$$

Przy czym pochodne przybliżone zostały przez:

$$\left[\left.\frac{\partial u^n}{\partial x}\right|_{xm,yk} + \left.\frac{\partial u^n}{\partial y}\right|_{xm,yk}\right]^2 = \left[\frac{u^n_{mk+1} + u^n_{m+1k} - u^n_{mk-1} - u^n_{m-1k}}{2\Delta}\right]^2$$

$$\left[\left.\frac{\partial u^n}{\partial t}\right|_{xm,yk}\right]^2 = \left[\frac{u^{n-1}_{mk} - u^{n+1}_{mk}}{2\delta}\right]^2$$

Energię solitonu w kroku *n-tym* liczymy **po** obliczeniach w kroku n+1 !

Literatura:

[1] R. H. Landau, M. J. Perez „Computational Physics Problem solving with computers“.