Projekt nr C.6.2

Znajdowanie częstości drgań własnych kołowej membrany

Wprowadzenie

Poszukiwane jest rozwiązanie równania falowego $\psi(\rho,\varphi,t)$ będące falą stojącą na membranie kołowej o promieniu ρ_o. Brzegi membrany są sztywno zamocowane, co określa warunek brzegowy dla tego rozwiązania:

$$\psi(\rho = \rho_o,\varphi,t) = 0 \qquad\qquad \forall\ \varphi, \exists\ t \tag{1}$$

Membrana ta charakteryzuje się zmienną gęstością, której rozkład jest kołowo symetryczny, więc gęstość zależy wyłącznie od ρ. Ponieważ gęstość membrany wchodzi do wyrażenia na prędkość rozchodzenia się fali sprężystej w membranie, w rezultacie otrzymujemy zależność prędkości rozchodzenia się fali od ρ.

Równanie falowe na funkcję $\Psi(\rho,\varphi,t)$ zapisane we wsp. biegunowych ma postać:

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\Psi\right] + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \tag{2}$$

Rozwiązanie będące falą stojącą ma postać:

$$\Psi(\rho,\varphi,t) = A(\rho,\varphi)\ \exp(-i\omega t) \tag{3}$$

Wstawienie tego rozwiązania do równania (2) daje nam równanie na niewiadomą funkcję $A(\rho,\varphi)$ opisującą amplitudę fali stojącej. Dalszym etapem jest założenie, że funkcja A separuje się na cześć zależną od ρ i część zależną od φ:

$$A(\rho,\varphi) = R(\rho)\cdot\Phi(\varphi) \tag{4}$$

Wykonanie wszystkich operacji związanych z separacją zmiennych prowadzi do następującego równania:

$$\frac{1}{R(\rho)}\left[\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}\right) + \frac{\omega^2\rho^2}{v^2}R\right] = -\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = m^2 \tag{5}$$

Rozwiązanie części kątowej, zależnej od φ, jest ogólnie znane jako:

$$\Phi(\varphi) = C \sin(m\varphi) + D \cos(m\varphi) \tag{6}$$

gdzie m musi być liczbą całkowitą, ze względu na warunki periodyczności. Dalsze przekształcenia równania na część radialną prowadzą do równania:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} + \left[\frac{\omega^2 \rho^2}{v^2(\rho)} - m^2 \right] R(\rho) = 0 \tag{7}$$

W równaniu tym $v^2(\rho)$ jest zależnością prędkości fali od ρ, ω jest częstością kołową tej fali, a m jest liczbą całkowitą. Założone uprzednio warunki brzegowe dają dla części radialnej $R(\rho = \rho_o) = 0$, zaś dodatkowe warunki brzegowe z symetrii funkcji dla $\rho = 0$ dają $R(\rho) = 0$ lub $\partial R/\partial\rho = 0$.

Równanie (7) można sprowadzić do postaci wygodniejszej do obliczeń przez wprowadzenie nowej funkcji $S(\rho) = \sqrt{\rho}\, R(\rho)$, dla której równanie różniczkowe przyjmuje postać:

$$\frac{\partial^2 S(\rho)}{\partial \rho^2} + \left[\frac{\omega}{v^2(\rho)} - \frac{m^2 - 1/4}{\rho^2} \right] R(\rho) = 0 \tag{8}$$

co można zapisać w postaci $S''(\rho) + k(\rho,m)\, S(\rho) = 0$, bardzo wygodnej do całkowania metodą Numerowa (patrz dodatek A). Dodatkowo, funkcja $S(\rho)$ ma jeszcze prostsze warunki brzegowe, gdyż przyjmuje wartość zero na obu końcach rozpatrywanego przedziału.

Zadania do wykonania

1) Napisać procedurę całkującą równanie (8) metodą Numerowa w zakresie od $\rho = \rho_o$ w dół do zera. Startując od $S(\rho = \rho_o) = 0$ i dowolnej pochodnej w tym punkcie tak długo dobierać wartość częstości fali ω, aż całkowanie równania (8) doprowadzi do wartości zero dla $\rho=0$ (Uwaga: wartość tą trzeba w ostatnim kroku całkowania ekstrapolować metodą inną niż Numerowa, gdyż wartość $k(\rho,m) \to \infty$ dla $\rho = 0$, a metoda Numerowa wymaga wstawienia tej wartości do wzoru). Przetestować dla $v(\rho) = \text{const} = 1$ oraz dla $v(\rho) = v(0)\,(1+\alpha\rho^2)$ przypadek $m = 0$. Dla $v = 1$ powinno się otrzymać $\omega_i = \nu_i / \rho_o$, gdzie ν_i jest i-tym miejscem zerowym zerowej f. Bessela J_o.

2) Wyznaczyć najniższe cztery częstości własne w dla $m = 0$ i $m = 1$ (porównaj projekt 7.1) i dla czwartej wartości wyrysować mapę znaku amplitudy fali stojącej tzn. funkcji $A(\rho,\varphi)$ przyjmując we wzorze (6) $D = 0$. Miejsca geometryczne znaku ujemnego zaznaczyć jednym kolorem, znaku dodatniego drugim kolorem (można użyć odcieni szarości lub kolorów tęczy do zaznaczenia wartości amplitudy). Na tak narysowanej mapie otrzymuje się tzw. figurę Chladiniego odpowiedniego rzędu.

Dodatek

Metody całkowania dedykowane dla równań drugiego rzędu

Rozważmy równanie różniczkowe w postaci:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = f(x, y) \tag{A1}$$

Zastosowani rozwinięcia w szereg Taylora dla standardowego przybliżenia drugiej pochodnej, tzn. trzypunktowej formuły różnicowej daje:

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} = y_n'' + \frac{h^2}{12} y^{(IV)} + O(h^4) \tag{A2}$$

Czwarta pochodna może zostać wyliczona z samego równania (A1):

$$y^{(IV)} = \frac{d^2}{d x^2} f(x, y) = \frac{f(x_{n+1}, y_{n+1}) - 2f(x_n, y_n) + f(x_{n-1}, y_{n-1})}{h^2} \tag{A3}$$

Wstawienie tego wzoru do (A2) i pomnożenie przez h^2 daje:

$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + f(x_n, y_n)h^2 + \frac{h^2}{12}\left[f(x_{n+1}, y_{n+1}) - 2f(x_n, y_n) + f(x_{n-1}, y_{n-1})\right] \tag{A4}$$

Wzór ten może być wykorzystany na trzy sposoby:

1. Jako najprostsza metoda całkowania równań zawierających tylko drugą pochodną (np. równań dynamiki) po pominięciu części w nawiasie kwadratowym:

$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + f(x_n, y_n)h^2 \tag{A5}$$

2. Jako korektor z predyktorem w postaci wzoru (A5)
3. W klasycznej metodzie Numerova, gdy funkcja *f(x,y)* ma postać:

$$f(x, y) = K(x)y + S(x) \tag{A6}$$

Wtedy funkcję $f(x_{n+1},y_{n+1})$ można przedstawić w postaci:

$$f(x_{n+1}, y_{n+1}) = K(x_{n+1})y_{n+1} + S(x_{n+1}) \tag{A7}$$

Pozwala to wyliczyć y_{n+1} jako funkcję pozostałych wartości ze wzoru (A4). Ponieważ rozwinięcie (A2) zawiera tylko parzyste potęgi h, więc błąd metody Numerova jest rzędu szóstego (!), czyli jest on o rząd mniejszy niż dla metody Runge-Kutty czwartego rzędu.

Podstawienie wzoru A7 oraz jego odpowiedników dla n i n-1 do wzoru A4 daje:

$$\begin{aligned} y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + h^2\left[K(x_n)y_n + S(x_n)\right] + \\ + \frac{h^2}{12}\left[K(x_{n+1})y_{n+1} - 2K(x_n)y_n + K(x_{n-1})y_{n-1}\right] + \\ + \frac{h^2}{12}\left[S(x_{n+1}) - 2S(x_n) + S(x_{n-1})\right] \end{aligned} \tag{A8}$$

Prowadzi to do następującego wzoru na y_{n+1}:

$$\begin{aligned} y_{n+1}\left[1 - K(x_{n+1})\frac{h^2}{12}\right] = 2y_n - y_{n-1} + h^2\left[K(x_n)y_n + S(x_n)\right] + \\ + \frac{h^2}{12}\left[K(x_{n-1})y_{n-1} - 2K(x_n)y_n\right] + \\ + \frac{h^2}{12}\left[S(x_{n+1}) - 2S(x_n) + S(x_{n-1})\right] \end{aligned} \tag{A9}$$

Dla $S(x) = 0$ wzór ten przybiera szczególnie uproszczoną postać:

$$y_{n+1}\left[1 - K(x_{n+1})\frac{h^2}{12}\right] = 2y_n\left[1 - K(x_n)\frac{h^2}{12}\right] - y_{n-1}\left[1 - K(x_{n-1})\frac{h^2}{12}\right] + h^2K(x_n)y_n \tag{A10}$$

Po wprowadzeniu zmiennej pomocniczej: $u_n = y_n\left[1 - K(x_n)\frac{h^2}{12}\right]$ mamy:

$$u_{n+1} = u_n\left[2 + \frac{K(x_n)h^2}{1 - K(x_n)h^2/12}\right] - u_{n-1} \tag{A11}$$

Literatura

[1] A. Arfken, Mathematical Methods for Physicists

[2] S. Koonin, Computational Physics