Projekt nr C.3.1

Dwuwymiarowy przepływ cieczy nieściśliwej

Równania ruchu

Przepływ cieczy nieściśliwej opisuje równanie Navier-Stokesa, które w postaci wektorowej ma postać:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} - \frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2 \vec{v} \ , \tag{1}$$

gdzie $\vec{v}$ stanowi lokalną wartość prędkości cieczy, P jej ciśnienie, a ρ i η odpowiednio gęstość i współczynnik lepkości cieczy. Równanie Navier-Stokesa łącznie z równaniem ciągłości:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{2}$$

opisuje rozwój w czasie rozkładu pola prędkości cieczy. Zadając warunki początkowe i brzegowe i rozwiązując oba równania można teoretycznie zasymulować dowolny przepływ niestacjonarny. Jednakże problem jest numerycznie bardzo trudny ze względu na niestabilnośći rozwiązań (mające zresztą interpretację fizyczną).

Ograniczymy się do problemów stacjonarnych zakładając $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$. Problemy te są łatwiejsze do rozwiązania. Przy założeniu przepływu stacjonarnego i rozpisaniu obu równań wektorowych na składowe uzyskujemy układ trzech równań różniczkowych

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x} P - \frac{\eta}{\rho}\nabla^2 v_x = 0 , \tag{3}$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y} P - \frac{\eta}{\rho}\nabla^2 v_y = 0 , \tag{4}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 , \tag{5}$$

które muszą być rozwiązane jednocześnie. W przypadku przepływu dwuwymiarowego można uzyskać bardzo ładne rozwiązanie tego problemu wprowadzając dwie nowe funkcje. Pierwszą z nich nazywamy funkcją prądu $\psi(x, y)$ i definiujemy poprzez jej pochodne:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} , \ v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \ . \tag{6}$$

Zauważmy, że przy tym założeniu po wstawieniu (6) do równania (5) otrzymujemy różnicę pochodnych mieszanych i równanie ciągłości (5) jest spełnione automatycznie.
Drugą funkcję, którą nazywamy wirowością definiujemy następująco:

$$\zeta = \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} . \tag{7}$$

Bezpośrednio z (6) i (7) wynika równanie Poissona na funkcję prądu:

$$\nabla^2 \psi = \zeta . \tag{8}$$

W celu znalezienia równania na funkcję wirowości różniczkujemy równanie (3) po x, równanie (4) po y i odejmujemy je stronami. Otrzymujemy:

$$\frac{\eta}{\rho}\nabla^2 \zeta = \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} . \tag{9}$$

Rozwiązanie równań (8) i (9) wystarczy do wyznaczenia rozkładów prędkości cieczy. Zauważmy, że z równań ruch wyeliminowane zostało ciśnienie P. Jeżeli chcemy wyznaczyć wyrażenie na P różniczkujemy równanie (3) po y, równanie (4) po x i dodajemy je. W wyniku otrzymujemy:

$$\nabla^2 P = 2\rho\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)^2\right). \qquad (10)$$

Po zadaniu warunków brzegowych rozwiązujemy równania (8) i (9) numerycznie korzystając z metody różnic skończonych. Startujemy z zaproponowanych warunków początkowych i stosujemy procedurę iteracyjną na przemian do obu równań. Dla zapewnienia zbieżności procedury iteracyjnej może być konieczne wprowadzenie wagi rzędu 0.1 dla wyniku równania (8). Przy dobrze odgadniętych warunkach początkowych zbieżność powinniśmy uzyskać po kilkudziesięciu iteracjach.

Warunki brzegowe

Warunki brzegowe zależą od rozwiązywanego układu. Przedyskutujmy dwa nieco różne przykłady.

A. Przepływ cieczy lepkiej przez rurę z umieszczoną w niej przeszkodą

Warunek brzegowy musi być zadany na całym obwodzie otaczającym obszar, w którym rozwiązujemy równania. Dla znalezienia warunku przy wlocie i wylocie rury, założymy, że rura jest na tyle długa, że obecność zastawki nie ma wpływu na prędkości przy wlocie i wylocie z rury. Ten rachunek wykonamy analitycznie.

Dla przepływu stacjonarnego (bez zastawki) w rurze zakładamy w całej objętości:

$$v_y = 0, \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

Dzięki temu z równania (3) wynika, że

$$\frac{\partial}{\partial x}P - \eta\frac{\partial^2}{\partial y^2}v_x = 0$$

Zakładamy stały gradient ciśnienia wzdłuż rury

$$\frac{\partial}{\partial x}P = Q$$

i znikanie prędkości na jej brzegach, czyli dla $y=y_1$ i $y=y_2$. W rezultacie dostajemy rozwiązanie:

$$v_x(x,y) = \frac{1}{2}\frac{Q}{\eta}(y-y_1)(y-y_2)$$

$$v_y(x,y) = 0$$

Znając prędkości możemy wyliczyć funkcję prądu

$$\psi_0(x,y) = \frac{1}{2}\frac{Q}{\eta}\left(\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2(y_1+y_2)\right)$$

$$\zeta_0(x,y) = \frac{1}{2}\frac{Q}{\eta}(2y - y_1 - y_2)$$

Rozwiązanie to przyjmiemy jako warunek brzegowy dla punktów przy wlocie i wylocie z rury (linie przerywane na rysunku 1). Możemy je również przyjąć jako warunek początkowy w całej objętości cieczy.

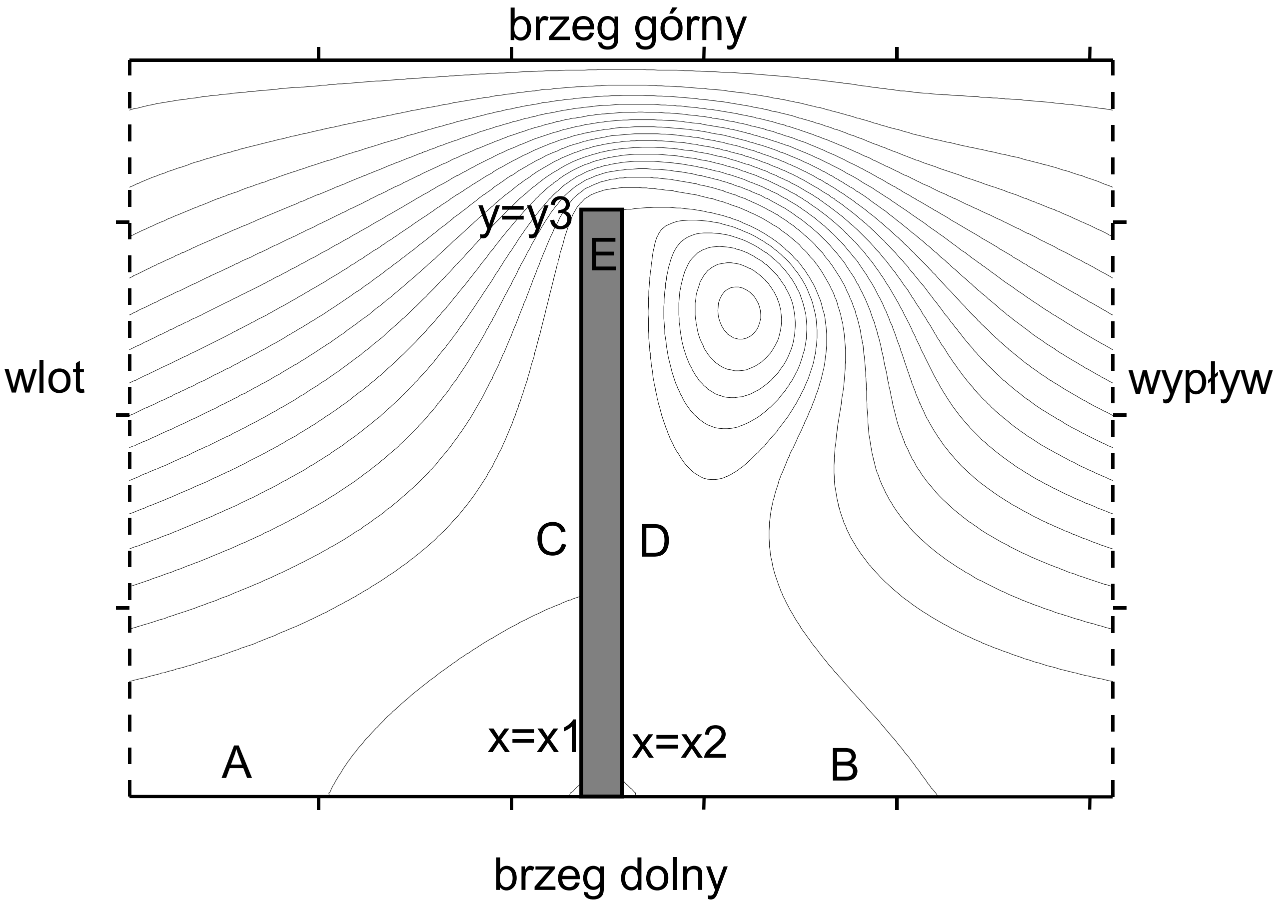
Na brzegu dolnym i górnym prosty warunek brzegowy uzyskujemy dla funkcji prądu, która jest stała wzdłuż linii prądu. Dla brzegu dolnego dostajemy:

$\psi = \psi_0(0, y_1)$

a dla brzegu górnego:

$\psi = \psi_0(0, y_2)$.

Dla wirowości warunki brzegowe są bardziej skomplikowane.



Rys.1.

Dzięki lepkości cieczy na brzegu górnym znikają obie składowe prędkości, znika również $\frac{\partial v_y}{\partial x}$. Pozostaje $\zeta = \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi$. Korzystając z rozwinięcia funkcji prądu w szereg Tyrola względem szerokości oczka siatki h, otrzymujemy:

$$\psi(x, y_2 - h) = \psi(x, y_2) - \frac{\partial}{\partial y}\psi(x, y_2)h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi(x, y_2)h^2$$

Ponieważ

$$\frac{\partial}{\partial y}\psi(x, y_2) = v_x(x, y_2) = 0$$

$$\zeta(x, y_2) = \frac{2}{h^2}(\psi(x, y_2 - h) - \psi(x, y_2)).$$

Na dolnym brzegu i ściankach przeszkody dostajemy:

Na linii A i B: $\zeta(x, y_1) = \frac{2}{h^2}(\psi(x, y_1 + h) - \psi(x, y_1))$

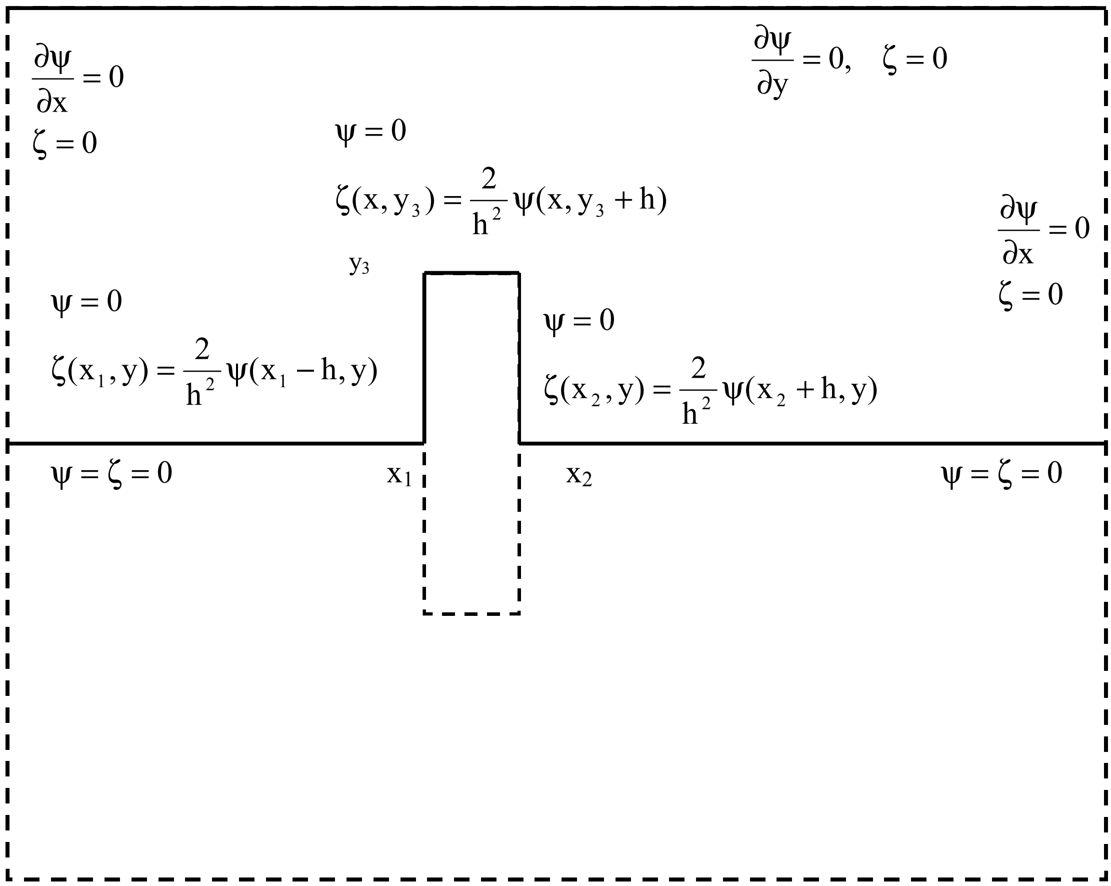
Na linii C: $\zeta(x_1, y) = \frac{2}{h^2}(\psi(x_1 - h, y) - \psi(x_1, y))$

Na linii D: $\zeta(x_2, y) = \frac{2}{h^2}(\psi(x_2 + h, y) - \psi(x_2, y))$

Na linii E: $\zeta(x, y_3) = \frac{2}{h^2}(\psi(x, y_3 + h) - \psi(x, y_3))$

B. Ciecz lepka opływająca ciało

Zakładamy symetryczny układ odniesienia i rozwiązujemy problem w górnej połówce. Warunki brzegowe narzucamy zgodnie z rysunkiem 2.



Rys.2.