Projekt nr C.1.3

Numeryczne całkowanie równania falowego dla drgającej struny.

Wprowadzenie

Celem projektu jest opracowanie numerycznej symulacji drgań poprzecznych struny. Jej wychylenie w chwili t i w punkcie x opisuje funkcja $y(x,t)$. Struna zaczepiona jest sztywno w punktach o współrzędnych $x = 0$ i $x = L$: $y(0,t) = y(L,t) = 0$. Ruch struny opisany jest jednowymiarowym równaniem falowym:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = v^2(x)\frac{d^2 y(x,t)}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

gdzie $V(x)$ jest prędkością rozchodzenia się fal poprzecznych, która zależy od lokalnej liniowej gęstości masy struny $\rho(x)$ w następują sposób: $v(x) = \sqrt{\frac{T_0}{\rho(x)}}$, a T_0 jest siłą napinającą strunę.

Ruch struny opiszemy na jednowymiarowej siatce punktów $x_i = i*dx$, gdzie $dx = L/(N)$, $i = 0,1,...,N$. Prędkość w ruchu porzecznym elementu i jest dana przez $V_i = \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{x=x_i}$, a przyspieszenie $a_i = \left.\frac{\partial y^2(x,t)}{\partial t^2}\right|_{x=x_i}$. Wartość przyspieszenia zgodnie z równaniem (1) zależy od lokalnego odkształcenia struny oraz jej lokalnej gęstości.

Zadania do wykonania

Opracować metodę różnicowego rozwiązywania równania (1) na siatce w oparciu o schematy Eulera i Verleta. Do aproksymacji drugiej pochodnej przestrzennej proszę użyć ilorazów:

- trójpunktowego: $\left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=x_i} = \frac{y(x_{i-1}) + y(x_{i+1}) - 2y(x_i)}{dx^2} + O(dx^2)$

- pięciopunktowego: $\left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=x_i} = \frac{-y(x_{i-2}) - y(x_{i+2}) + 16y(x_{i-1}) + 16y(x_{i+1}) - 30y(x_i)}{12dx^2} + O(dx^4)$

Energia struny jest sumą energii kinetycznej i potencjalnej.

$$E = \sum_{i=0,N} \frac{dx\rho(x_i)V_i^2}{2} + \sum_{i=0,N-1} \frac{T_0\left(y(x_{i+1}) - y(x_i)\right)^2}{2dx}$$

1. Zbadać precyzję schematów Eulera i Verleta ze względu na zachowanie energii. Jak małe muszą być kroki przestrzenne i czasowe?

2. Uformować pakiet falowy, który w chwili początkowej dany jest funkcją postaci $y(x,t) = f(x - vt)$. Czy pakiet zachowuje kształt w czasie ruchu?

3. Załóżmy że na środku struny następuje skokowa zmiana gęstości liniowej $\rho(x)$ (z ρ_1 w lewej części do ρ_2 w prawej). Powinniśmy dostać zjawisko odbicia. Jeśli pakiet falowy pada na granicę ośrodków z lewej strony to stosunek amplitudy fali odbitej do padającej dany jest formułą $R = \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}$. Sprawdzić jej słuszność.

Literatura

F.S. Crawford „Fale", PWN Warszawa 1972.