Projekt nr C.1.1

Wyznaczanie orbit cząstek w polu potencjału centralnego metodą całek ruchu

Wprowadzenie

Problem cząstki klasycznej poruszającej się w polu centralnego potencjału jest typowym zadaniem rozwiązywanym podczas kursu mechaniki teoretycznej. Ze względu na skomplikowane wyniki końcowe, analitycznie udaje się przedyskutować do końca tylko niektóre postacie możliwych potencjałów. W tym ćwiczeniu przedyskutujemy ruch cząstki w polu potencjału typu $V(r) = - a/r^{\tau}$, gdzie $\tau \in (0,2)$. Analitycznie można rozwiązać problem tylko dla $\tau = 1$. Stanowić będzie on dla nas sprawdzian wybranej procedury numerycznej.

Postawmy najpierw pytania, na które będziemy szukać odpowiedzi.

1. Dla jakich wartości parametrów wejściowych (τ, α, masa, energia i moment pędu) cząstka w polu stanowić będzie stabilny układ związany, tzn. poruszać się będzie po ograniczonym torze nie spadając na centrum (orbicie).
2. Dla jakich wartości parametrów, tory cząstki będą krzywymi zamkniętymi.
3. Jak wyglądać będzie graficzne przedstawienie torów, szczególnie w przypadku niespełnienia warunku 2.

<u>Uwaga</u>: Ponieważ koncentrujemy się na układach związanych, zakładamy $E < 0$ i dla tego przypadku przeprowadzimy rozważanie teoretyczne.

<u>Teoria</u>

Problem jest zwykle przeliczany na ćwiczeniach z mechaniki teoretycznej, dlatego tutaj przypomnę jedynie ciąg rozumowania prowadzący do wzorów końcowych, których będziemy używać przy programowaniu.

Tor cząstki jest płaski, jej położenie zapiszemy we współrzędnych biegunowych r i ϕ. ϕ jest zmienną cykliczną, zachowany będzie więc moment pędu L i energia całkowita E.

Z zasady zachowania krętu dostajemy warunek:

$$L = mr^2 \frac{d\phi}{dt} \tag{1}$$

lub po przekształceniu:

$$d\phi = \frac{L}{mr^2} dt \tag{2}$$

Z prawa zachowania energii:

$$E = \frac{m}{2}[(\frac{dr}{dt})^2 + r^2(\frac{d\phi}{dt})^2] - \frac{\alpha}{r^\tau} \tag{3}$$

wydobywamy dr/dt, korzystając jednocześnie z (1):

$$dr = \sqrt{\frac{2}{m}(E + \frac{\alpha}{r^\tau} - \frac{L^2}{2mr^2})}dt \tag{4}$$

Połączmy wyrażenia (2) i (4) eliminując z nich dt. Otrzymujemy:

$$dr = \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2\alpha}{mr^\tau} - \frac{L^2}{m^2 r^2}}\frac{mr^2}{L}d\phi = \sqrt{\frac{2mE}{L^2}r^2 + \frac{2m\alpha}{L^2 r^{\tau-2}} - 1}rd\phi \tag{5}$$

Jeżeli za jednostkę długości przyjmiemy:

$$\frac{1}{\sqrt{-2mE}} \tag{6}$$

wówczas przechodzimy do jednostek bezwymiarowych, w których równanie (5) przyjmuje postać:

$$dr = \sqrt{\beta r^{2-\tau} - r^2 - 1}rd\phi \tag{7}$$

gdzie:

$$\beta = \frac{2m\alpha}{L^2}(\frac{L}{\sqrt{-2mE}})^{2-\tau} \tag{8}$$

Przyjmując dodatkowo za jednostkę czasu :

$$\frac{L}{-2E} \tag{9}$$

uzyskujemy równania (2) i (4) w postaci bezwymiarowej:

$$d\phi = \frac{1}{r^2}dt \tag{10}$$

oraz:

$$dr = \sqrt{\beta r^{2-\tau} - r^2 - 1}\frac{1}{r}dt \tag{11}$$

W ten sposób otrzymaliśmy układ równań zawierający jedynie dwa parametry zewnętrzne: wykładnik w potencjale τ i β - zawierający informacje o α, m, E i L.

Szukając orbit cząstek, musimy założyć istnienie dwóch odległości r_{min} i r_{max} w których pochodna dr/dt zmienia znak. Z równania (11) widzimy, że może mieć to miejsce jedynie gdy wyrażenie pod pierwiastkiem się zeruje.

$$\beta r^{2-\tau} - r^2 - 1 = 0 \tag{12}$$

Dla $\tau = 1$ maksymalną i minimalną odległość od centrum możemy wyznaczyć rozwiązując równanie kwadratowe. Otrzymujemy:

$$r_{min}^{max} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4}}{2} \tag{13}$$

Naturalnie wyrażenie pod pierwiastkiem musi być dodatnie (warunek istnienia dwóch rzeczywistych rozwiązań). Dostajemy więc ograniczenie na β, $\beta \geq 2$. Jeżeli $\beta = 2$, $r_{min} = r_{max}$ i otrzymujemy orbitę kołową. Wraz ze wzrostem b wydłużać się będzie elipsa toru. Dla $\tau \neq 1$ równanie (12) musimy rozwiązać numerycznie. Mając r_{min} i r_{max} możemy rozstrzygnąć czy tor jest krzywą zamkniętą. W tym celu skorzystamy z wyrażenia (7) wykonując całkę po dr w granicach od r_{min} do r_{max} .

$$dr = \sqrt{\beta r^{2-\tau} - r^2 - 1}\,\frac{1}{r}\,dt \tag{14}$$

Jeżeli $\Delta\phi$ stanowi wymierny ułamek π, wówczas tor jest zamknięty.

$$\Delta\phi = \frac{N}{M}\pi \tag{15}$$

Liczba M określa liczbę ramion "gwiazdy" utworzonej przez tor. Dla $\tau = 1$, $\Delta\phi$ jest równe dokładnie π. (Sprawdzić analitycznie).

Zadania do wykonania

Zadanie I

Przygotować programy na rozwiązywanie równania (12) i liczenie całki (14). Programy przetestować dla $\tau = 1$.
Znaleźć układ parametrów $\tau \in (0,2)$ i β dla których tor cząstki będzie krzywą zamkniętą. Najciekawszy byłby przypadek dla którego, $\Delta\phi = \pi/2$. Czy uda się wam go znaleźć?

Zadanie II

Przygotować program graficzny rysujący tor cząstki na ekranie monitora dla zadanych t i b. Przy konstrukcji tego programu można posłużyć się równaniem (7), lub układem równań (10) i (11). W ostatnim przypadku prędkość przesuwania się punktu po ekranie symuluje prędkość ciała w przestrzeni.
Zastosować procedurę numeryczną możliwie szybką, żeby śledzenie toru cząstki na ekranie było zabawą, lecz dokładną. Dla $\tau = 1$, tory muszą się pokrywać dla kilkukrotnego obiegu cząstki wokół centrum.

Literatura

1. Wykład
2. Rubinowicz W., Królikowski W., „Mechanika teoretyczna”