Projekt B 6.1
Transformata Fouriera

Wstęp.

W wyniku eksplozji powstaje głośna fala dźwiękowa. Zależność natężenia dźwięku A(t) rejestrowana przez mikrofon w czasie $t\in(T_0,T)$ można w niektórych przypadkach przybliżyć funkcją Gaussa. Przeważnie jednak A(t) jest dość skomplikowana i zależy np. od odległości, geometrii ośrodka itp. Przeważnie zamiast badać natężenie bada się widmo, czyli zależność Z(ω) gdzie ω - częstotliwość.

Przejście pomiędzy A(t) a Z(ω) dokonuje się stosując **transformację Fouriera**. Transformacja Fouriera z definicji:

$$Z(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(i\omega t)A(t)dt \qquad (1)$$

Dla A(t) w postaci gaussianu można policzyć analitycznie transformatę Fouriera:

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\omega t)\exp(-bt^2)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-b(t-\frac{i\omega}{2b})^2-\frac{\omega^2}{4b^2})dt = \\ &\frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\exp\left(-\frac{\omega^2}{4b^2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-z^2)dz = \frac{1}{\sqrt{2b}}\exp\left(-\frac{\omega^2}{4b^2}\right) \end{aligned} \qquad (2)$$

Z wzoru (1) możemy uzyskać zależność na **dyskretną transformatę Fouriera**:

$$Z(\omega_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{N}A(t_k)\exp(i\omega_n t_k)\Delta \qquad (3)$$

Wzór (2) jest ważny i wymaga szczegółowego omówienia.
Komputer do analizy potrzebuje danych pomiarowych w postaci cyfrowej, oznacza to w naszym przypadku po prostu przesłanie wartości sygnału $A(t_k)$ dla każdej chwili t_k.
Postać cyfrowa jest **dyskretna** tzn. znamy wartość A(t) **tylko** w chwilach t_k.
Jeśli pomiar trwał w czasie $t\in(T_0,T)$ i do komputera wpłynęło N+1 danych pomiarowych to charakterystyczny dla danego urządzenia czas próbkowania (*samling*) wynosi $\Delta = (T-T_0)/N$.
Wzór (3) można przekształcić do postaci:

$$Z(\omega_n) = \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{N}A_k\exp(2\pi i\cdot n\cdot\frac{k}{N}) \qquad (4)$$

Cel pracy:

a) Napisać program* który:

1. Do macierzy A wpisuje wartości zadanej funkcji f w punktach t_k. k=0,..,N , $t\in(-5,5)$.
2. Oblicza z (4) transformatę Fouriera.
3. Wypisuje do pliku wartości $Z(\omega_n)$

b) Narysować $Z(\omega_n)$, $\omega_n = \frac{N}{n\Delta}$ (np. w programie GnuPlot) dla funkcji f(t):

1. $f(t) = \exp(-t^2)$
2. $f(t) = \exp(-t^2)*\sin(t/[10\pi])$

*): ze względu na działania na liczbach zespolonych na pewno najłatwiej ten program napisać w FORTRANie.