Projekt nr B 5.4

Równanie logistyczne – generator liczb pseudolosowych

Wstęp.

Równanie logistyczne (1) jest bodajże najprostszym przykładem równania nieliniowego, w którym da się pokazać najistotniejsze cechy zachowań chaotycznych.

$$x_{i+1} = \kappa x_i(1 - x_i) \qquad (1)$$

Zmienna x_i jest znormalizowana do 1, współczynnik $\kappa \in (0, 4)$.
Równanie to służy między innymi do opisu rozwoju populacji w środowisku o ograniczonej pojemności.
Stabilność rozwiązania równania (czyli x_i dla $i \rightarrow \infty$) zależy od wartości parametru κ:
Dla $\kappa \in (0 , 1)$ mamy jedno rozwiązanie – 0 - w każdym kroku populacja wymiera.
Dla $\kappa \in (1 , 3)$ rozwiązanie dąży do pewnej wartości granicznej.
Dla $\kappa \in (3 , 3.57)$ rozwiązanie dąży do stabilnego *cyklu granicznego* o pewnym okresie (2, 4,...)
Dla $\kappa \in (3.57, 4)$ brak jest stabilnego rozwiązania (*zachowanie chaotyczne*)

W tym projekcie należy wykorzystać zachowanie chaotyczne, które posłuży do generowania ciągu liczb pseudolosowych. Trzeba użyć $\kappa = 4. - 10^{-12}$, dla którego rozwiązanie oscyluje pomiędzy 0 a 1.
W algorytmach numerycznych (np. Monte Carlo) używa się ciągów losowych *nieskorelowanych* oraz *jednorodnych*. W celu uzyskania rozkładu jednorodnego trzeba posłużyć się transformacją:

$$y_i = \frac{1}{\pi} \arccos(1 - 2x_i). \qquad (2)$$

Jakości generowanego ciągu, można sprawdzić badając
a) jednorodność

$$\langle y^k \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^k . \qquad (3)$$

Dla ciągu jednorodnego możemy zastosować przybliżenie:

$$\langle y^k \rangle \approx \int_0^1 dy P(y) y^k + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) = \frac{1}{k+1} \qquad (4)$$

b) Korelacje krótko-zasięgowe:

$$C(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i\, y_{i+k} . \qquad (k=1,2...) \qquad (5)$$

Dla ciągu nieskorelowanego:

$$C(k) \approx \int_0^1 dy_1 \int_0^1 dy_2 P(y_1) P(y_2) y_1\ y_2 = \frac{1}{4}$$

(6)

Cel pracy.

1. Napisać program wykorzystujący równanie (1) do generacji ciągu x_i następnie wykorzystać (2) do wyznaczenia y_i.
   a) Do ciągu wziąć wszystkie elementy x_i .
   b) Wybrać tylko co szósty element x_i.
2. Przebadać jakość a) i b) przy pomocy zależności (3) i (5), porównać z wartościami teoretycznymi uzyskanymi z (4) i (6).
3. Porównać czas uzyskania ciągu N=10000 liczb pseudolosowych uzyskiwany przez funkcje biblioteczne z czasem uzyskiwanym przez procedurę z punktu 1b.

Literatura:

[1] R. H. Landau, M. J. Perez „Computational Physics Problem solving with computers“.