Projekt nr B.3.1

Solitonowe rozwiązania równania Kortewega–de Vriesa

Wprowadzenie

Wysokość długiej fali wodnej *u(x,t)* o niewielkiej amplitudzie poruszającej się w pod wpływem grawitacji w kanale o zaniedbywalnie małej szerokości opisywana jest przez nieliniowe równanie różniczkowe Kortewega–de Vriesa (KdV),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 6u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \tag{1}$$

gdzie $u\partial u/\partial x$ jest członem nieliniowym odpowiedzialnym za skracanie czoła fali, a $\partial^3 u/\partial x^3$ to człon dyspersyjny, który ma wpływ na rozciąganie czoła fali. W sytuacji kiedy oba te wyrazy są porównywalne, może powstać pakiet falowy rozchodzący się bez zmiany kształtu. Taki pakiet, poruszający się w ośrodku nieliniowym, nazywany jest solitonem.

Równanie (1) można rozwiązać numerycznie na siatce. Przez u_n^j oznaczymy wartość amplitudy drgania w punkcie o współrzędnej przestrzennej $x= j\times dx$ w chwili czasowej $t = n \times dt$. Pochodne przestrzenne zastępujemy ilorazami różnicowymi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_n^{j+1} - u_n^{j-1}}{2dx}, \text{ oraz} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{u_n^{j+2} - 2u_n^{j+1} + 2u_n^{j-1} - u_n^{j-2}}{2(dx)^3}. \tag{3}$$

Schemat różnicowy, który można uzyskać z bezpośrednio z dyskretyzacji pochodnej czasowej wymaga pewnej modyfikacji dla zapewnienia stabilności. Przepis na ewolucję czasową jest następujący

$$u_{n+1}^j = u_n^j + dt\left(6\bar{u}_n^j \frac{\bar{u}_n^{j+1} - \bar{u}_n^{j-1}}{2dx} - \frac{\bar{u}_n^{j+2} - 2\bar{u}_n^{j+1} + 2\bar{u}_n^{j-1} - \bar{u}_n^{j-2}}{2(dx)^3}\right) \tag{4}$$

gdzie wartość wychylenia *u(x,t)* z równania (1) została zastąpiona przez $\bar{u}(x,t)$, średnią arytmetyczną wychylenia w punkcie *j* i w punktach sąsiednich:

$$\bar{u}_n^j = \frac{u_n^{j+1} + u_n^j + u_n^{j-1}}{3} \tag{5}$$

Rozwiązaniem równań KdV dla warunku początkowego

$$u(x,0) = -N(N+1)/\cosh^2(x), \tag{6}$$

jest *N* solitonów poruszających się z różnymi prędkościami. Analityczne rozwiązanie równania KdV dla *N*=1 ma postać

$$u(x,t) = -2/\cosh^2(x-4t), \tag{7}$$

Funkcja (2) opisuje soliton która porusza się w prawo z prędkością *v = 4.*

Zadania do wykonania

- Korzystając z przedstawionego algorytmu zasymulować ruch jednego, dwóch i trzech solitonów. W ośrodku nieliniowym solitony mogą się wyprzedzać. Zjawisko takie nie zachodzi dla paczek w ośrodku liniowym. [Stacjonarne paczki falowe w ośrodku liniowym opisane są funkcją $f(x \pm vt)$, poruszają się z prędkością $\pm v$ która jest niezależna od kształtu pakietu.] Zasymulować to zjawisko. W tym celu zadać warunek początkowy (3), a następnie na chwilę odwrócić kierunek upływu czasu, tak aby rozdzielić solitony, które w chwili t=0 przekrywają się.
- Solitony oddziałują ze sobą, tzn. w momencie zderzenia reagują na swoją wzajemna obecność, inaczej niż paczki falowe w ośrodku liniowym. Oddziaływanie między solitonami zmienia ich prędkości w momencie zderzenia, ale kształt solitonów po zderzeniu pozostaje bez zmian. Zilustrować to zjawisko.
- Zbadać zachowanie pakietów falowych przy zaniedbaniu nieliniowego wyrazu w równaniu (1).
- **Uwaga:** Równanie KdV posiada solitonowe rozwiązania tylko dla paczek poruszających się w prawą stronę (spływających pod wpływem grawitacji w prawo). Próba zmuszenia solitonu od poruszania się w lewo skazana jest na niepowodzenie.

Literatura

1. Kinzel W., Reents G., „Physics by Computer”, Springer 1996