

## Projekt nr B.2.1

# Rozwiązywanie równania Laplace'a w dwóch wymiarach metodą relaksacji na siatce ze zmienną gęstością punktów

## Wprowadzenie

Równanie Laplace'a opisuje rozkład przestrzenny potencjału elektrycznego w obszarze, w którym nie ma ładunków elektrycznych. Niezerowe wartości potencjału w tym obszarze spowodowane są istnieniem ładunków poza tym obszarem lub na jego brzegach. Samo równanie dla rozważanego tu przypadku dwuwymiarowego ma postać:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

gdzie  $\Phi(x, y)$  oznacza potencjał szukany. Aby rozwiązanie równania (1) było jednoznaczne, konieczne jest zadanie warunków brzegowych dla tego rozwiązania. Dla równania Laplace'a możliwe jest podanie warunków brzegowych na trzy sposoby:

1. Warunki brzegowe typu Dirichleta: zadane są stałe wartości potencjału na brzegach rozpatrywanego obszaru oraz na dowolnych krzywych zamkniętych wewnątrz tego obszaru. Warunki takie odpowiadają obecności powierzchni przewodzących w zadanych miejscach.
2. Warunki brzegowe typu Neumana: zadana jest wartość pochodnej normalnej potencjału na brzegach i ewentualnie na zamkniętych krzywych wewnątrz rozpatrywanego obszaru. Odpowiada to zadaniu gęstości ładunku na odpowiednich powierzchniach (krzywych), czyli obecności ciał nie przewodzących prądu elektrycznego.
3. Warunki mieszane, nie mające tak czystego znaczenia fizycznego.

Rozwiązanie równania Laplace'a na dwuwymiarowej siatce punktów numerowanych liczbami naturalnymi  $i, j$  sprowadza się do znalezienia wartości potencjału  $\Phi_{ij}$  na wszystkich węzłach siatki, takich, aby spełniały one różnicowe przybliżenie równania Laplace'a:

$$\frac{\Phi_{(i+1)j} - 2\Phi_{ij} + \Phi_{(i-1)j}}{h^2} + \frac{\Phi_{i(j+1)} - 2\Phi_{ij} + \Phi_{i(j-1)}}{h^2} = 0 \quad (2)$$

gdzie  $h$  jest bokiem każdego z oczek siatki. Jak z tego wynika, potencjały  $\Phi_{ij}$  na siatce kwadratowej spełniają bardzo prostą relację, stanowiącą, że wartość potencjału w każdym z węzłów siatki jest średnią arytmetyczną wartości w czterech sąsiadujących węzłach siatki:

$$\Phi_{ij} = \frac{\Phi_{(i-1)j} + \Phi_{(i+1)j} + \Phi_{i(j-1)} + \Phi_{i(j+1)}}{4} \quad (3)$$

Warunek ten pozwala w zasadzie zbudować układ równań liniowych na wartości potencjałów, który daje się jednoznacznie rozwiązać. Trudność tego podejścia polega na tym, że przy siatkach rozmiaru (100x100) węzłów, macierz układu równań ma rozmiary (10000x10000) i rozwiązanie takiego układu z odpowiednią dokładnością nie jest łatwe.

Alternatywne podejście stanowi tzw. metoda relaksacji, czyli metoda rekurencyjnego znajdowania rozwiązania, startująca od w miarę sensownego przybliżenia początkowego. Okazuje się, że znajdowanie rozwiązania równania Laplace'a równoważne jest znajdowaniu minimum pewnej wielkości odpowiadającej fizycznie energii pola elektrycznego. Wielkość ta ma postać:

$$E = \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi \quad \text{czyli} \quad \left[ \frac{\Phi_{(i+1)j} - \Phi_{ij}}{h} \right]^2 + \left[ \frac{\Phi_{i(j+1)} - \Phi_{ij}}{h} \right]^2 \quad (4)$$

Metoda relaksacji polega na generowaniu następnego rozwiązania przybliżonego w taki sposób, aby jego energia była mniejsza niż przybliżenia poprzedniego. Stan końcowy, czyli stan o minimalnej energii powinien spełniać równanie różnicowe (3). Prowadzi do tego transformacja postaci:

$$\Phi_{ij}^{(n+1)} = (1 - \omega)\Phi_{ij}^{(n)} + \omega \frac{\Phi_{(i-1)j}^{(n)} + \Phi_{(i+1)j}^{(n)} + \Phi_{i(j-1)}^{(n)} + \Phi_{i(j+1)}^{(n)}}{4} \quad (5)$$

gdzie  $\omega$  jest nazywana tzw. parametrem relaksacji. Przypadek  $\omega < 1$  nazywany jest niedorelaksacją (under-relaxation) zaś przypadek  $\omega > 1$  nadrelaksacją (over-relaxation). Okazuje się, że istnieje pewien zakres parametrów  $\omega$ , dla którego transformacja rozwiązania n-tego w n+1-sze daje w rezultacie obniżenie energii (4), czyli prowadzi do dokładnego rozwiązania. Istnieje na dodatek pewna wartość  $\omega$ , która jest optymalna z punktu widzenia szybkości dochodzenia do rozwiązania dokładnego.

Istnieje dodatkowa modyfikacja metody relaksacji, która eliminuje konieczność trzymania dwu kopii rozwiązania (n-tego i n+1-szego) jednocześnie. Wykorzystuje się fakt, że „przemiatanie” siatki odbywa się w określonej kolejności. Okazuje się, że wystarczy trzymać jedną kopię  $\Phi_{ij}$  jeżeli transformacja ma postać:

$$\Phi_{ij}^{(n+1)} = (1 - \omega)\Phi_{ij}^{(n)} + \omega \frac{\Phi_{(i-1)j}^{(n+1)} + \Phi_{(i+1)j}^{(n+1)} + \Phi_{i(j-1)}^{(n+1)} + \Phi_{i(j+1)}^{(n+1)}}{4} \quad (6)$$

Na dodatek, taka postać transformacji przyspiesza „propagację” poprawnego rozwiązania. Jeszcze jeden sposób optymalizacji algorytmu polega na wykorzystaniu faktu, że czas wykonania jednej transformacji zależy liniowo od ilości węzłów i korzystniej jest najpierw wykonać relaksację na rzadszej siatce (np. o dwa razy większym boku czyli cztery razy krótszą), wypełnić węzły nie używane w pierwszej relaksacji i dopiero potem przystąpić do relaksacji na mniejszym rozmiarze oczek siatki.

## Zadania do wykonania

Napisać procedurę relaksacji rozwiązania na siatce  $161 \times 161$  punktów, zaczynając od oczka siatki równego np. 8 i schodząc kolejnymi etapami do oczka siatki równego 1 doprowadzić do ostatecznej relaksacji rozwiązania. Warunki brzegowe zadawane są jako potencjał równy zero dla  $[i=1, j=1 \dots 161]$ ,  $[i=161, j=1 \dots 161]$ ,  $[i=1 \dots 161, j=1]$ ,  $[i=1 \dots 161, j=161]$ . Dodatkowo należy skonstruować funkcję (z argumentami  $i, j$ ), która zadawać będzie warunki stałości potencjału wewnątrz dwóch obszarów (elektrod) na obszarze siatki. Funkcja ta powinna zwracać wartość 1 dla jednej elektrody, -1 dla drugiej elektrody i zero poza obszarem elektrod. Wywoływanie tej funkcji w programie służy do ustalenia, czy wartość potencjału ma być uaktualniana, czy pozostawiona stała.

W trakcie wykonywania kolejnych transformacji powinna być na bieżąco obsługiwana grafika (mapa potencjału z zaznaczeniem odpowiednich wartości w przyjętej skali kolorów) dla aktualnego rozmiaru oczek siatki. Przy takim rozmiarze macierzy każdy jej element może na przykład odpowiadać polu o wymiarach  $3 \times 3$  piksele na karcie VGA.

Obliczenia należy wykonać dla przypadku dwóch kół o średnicy rzędu 20 oczek siatki oraz dla dwu płaskich elektrod, symulujących kondensator płaski z efektami brzegowymi.

### Wejście

Program wczytuje wartości potencjałów na dwóch elektrodach w obszarze siatki, zadanych przez wspomnianą wyżej funkcję „geometryczną”. Wczytywane są też poziomicie mapy potencjału oraz dokładność procentowa (maksymalna względna zmiana potencjału w węźle) przy której należy zakończyć relaksację z danym rozmiarem oczek.

### Wyjście

Mapa potencjału z odpowiednio zaznaczonymi obszarami pomiędzy wartościami „poziomic”. Dodatkowo można wyprowadzić graficzne przekroje potencjału wzdłuż prostych dzielących symetrycznie rozpatrywany kwadrat.

## Literatura

1. Koonin, Computational Physics
2. Press i in., Numerical Recipes