

PROJEKT NR B 1.7

Drgania tłumione.

Ciało o masie m przyłączone do sprężyny o stałej sprężystości k i zanurzone w płynie (gaz lub ciecz) może wykonywać drgania. Na poruszające się ciało działa nie tylko siła sprężysta $F_s = -kx$ ale też siła oporu F_t będąca wynikiem oddziaływania z ośrodkiem, która dla małych prędkości jest proporcjonalna do prędkości i skierowana przeciwnie do kierunku ruchu:

$$F_t = -b \frac{dx}{dt} \quad (1)$$

Równanie ruchu dla drgań tłumionych otrzymujemy z 2 zasady dynamiki Newtona

$$F_s + F_t = m \frac{d^2 x}{dt^2} \Rightarrow -kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (2)$$

Rozwiązaniem równania (2) jest:

$$x = A_0 \exp(-\beta t) \cos(\omega_1 t + \varphi) \quad (3)$$

gdzie: $\beta = \frac{b}{2m}$ współczynnik tłumienia

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \text{ - częstość drgań tłumionych} \quad (\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ - częstość własna układu})$$

Amplituda drgań tłumionych maleje z czasem a częstość drgań jest mniejsza niż układu bez tłumienia ($\omega_0 > \beta$) – ale ruch układu nadal jest periodyczny.

W ośrodku o dużym współczynniku b (lub małym k) może dojść do przypadku $\omega_0 < \beta$ i wówczas mamy do czynienia z ruchem aperiodycznym (nieokresowym) zwanym także ruchem pełzającym. Rozwiązanie równania (2) jest wówczas następujące:

$$x = A_1 \exp[-(\beta + \omega_2)t] + A_2 \exp[-(\beta - \omega_2)t] \quad (4)$$

gdzie: A_1, A_2 – stałe

$$\omega_2 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Dla przypadku szczególnego, gdy $\omega_0 = \beta$ mamy do czynienia z ruchem pełzającym krytycznym o rozwiązaniu:

$$x = A(1 + \alpha t) \exp[-\beta t] \quad (5)$$

1. Jako metodę numeryczną do rozwiązania równania ruchu zastosować metodę Rungego-Kutty 2 i 4 rzędu. Proszę rozważyć trzy przypadki:
 - a) $\omega_0 > \beta$
 - b) $\omega_0 = \beta$
 - c) $\omega_0 < \beta$
2. Rozwiązanie numeryczne każdego przypadku porównać z rozwiązaniem analitycznym (3,4,5) – wykres.
3. Rozwiązać równanie (2) z siłą tarcia typu: $F_t = -c \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$

Literatura:

1. Czesław Bobrowski: „Fizyka – krótki kurs”
2. J.M. Thijssen “Computational Physics”