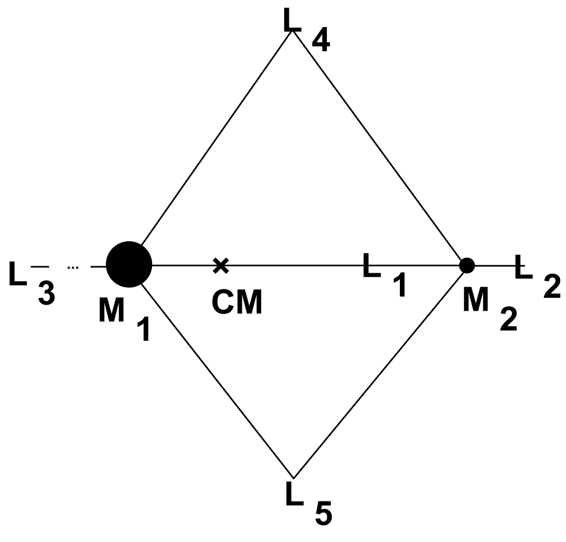
Projekt nr B.1.6

Punkty Lagrange'a w układzie pary oddziaływujących grawitacyjnie ciał

Wprowadzenie

Dwa ciała niebieskie obracają się względem siebie z prędkością kątową ω taką, że odległość między nimi nie zmienia się w czasie ruchu. W układzie odniesienia wirującym z ciałami można wskazać kilka szczególnych punktów zwanych punktami Lagrange'a. Wyjątkowość tych punktów polega na tym, iż umieszczony w nich punkt materialny, któremu nadamy prędkość kątową układu ω, zachowuje swoje położenie względem dużych mas. W wirującym układzie odniesienia siły grawitacyjne działające na ciała umieszczone w punktach Lagrange'a są całkowicie znoszone przez siły pozorne. Nie wszystkie punkty Lagrange'a są punktami równowagi stabilnej. W punktach stabilnych (punktami takimi są tzw. punkty trojańskie L_4, L_5 o ile $M_1/M_2>25$ – patrz rysunek) odchylenia położenia i prędkości, dopóki nie są zbyt wielkie, powodują quasiperiodyczny ruch ciała wokół punktu Lagrange'a. Ciało pozostaje w niemal stałej odległości od obydwu dużych mas i co więcej jest widziane przez obserwatorów umieszczonych na M_1 i M_2 pod prawie niezmiennym kątem. Pozostałe punkty Lagrange'a (L_1–L_3) są punktami równowagi chwiejnej. Każde, nawet najmniejsze odchylenie położenia ciała od L_1–L_3, lub niedopasowanie jego prędkości kątowej do ω, powoduje nieuchronne oddalanie się ciała od punktów Lagrange'a.
Położenie punktów Lagrange'a w układzie wirującym przedstawia poniższy rysunek.



W układzie wirującym punkty te mają współrzędne:

$$L_{1,2} = \left(R\left[1 \pm \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{1/3}\right], 0 \right)$$

$$L_3 = \left(-R\left[1 + \frac{5}{12}\alpha\right], 0 \right)$$

$$L_{4,5} = \left(\frac{R}{2}\left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}\right), \pm\frac{\sqrt{3}}{2}R \right)$$

gdzie:
R – odległość między ciałami M_1 i M_2,
$\alpha = M_2/(M_1+M_2)$.

Ciała M_1 i M_2 położone są w punktach:
$M_1 : \left(-\frac{M_2}{M_1+M_2}R, 0 \right); M_2 : \left(\frac{M_1}{M_1+M_2}R, 0 \right)$, tak że środek masy układu (CM) znajduje się w środku układu współrzędnych.
Punkty L_4 i L_5 tworzą z masami M_1 i M_2 trójkąty równoboczne.

Zadania do wykonania

1. Rozpisać równania Newtona dla ciał oddziaływujących grawitacyjnie. Założyć że poruszają się na wspólnej płaszczyźnie. Opracować na tyle dokładny schemat różnicowy rozwiązywania równań Newtona, aby odpowiednio wprawione w ruch ciała M_1 i M_2 poruszały się po dokładnie kołowych, zamkniętych orbitach oraz aby ciało umieszczone dokładnie w jednym z punktów L_1–L_5 i rozpędzone do prędkości kątowej układu, zachowywało swoje położenie względem dużych mas.

2. Zbadać tor ciała przy drobnym odchyleniu (prędkości lub położenia) od punktów L4.

3. Wyznaczyć obszar stabilności punktów L_4 i L_5 w przestrzeni położeń i prędkości. Jak zależy wielkość tych obszarów od stosunku mas M_1/M_2. Animacje i wykresy wykonać w układzie inercjalnym oraz w układzie wirującym.

Literatura

S. E. Koonin, „Introduction to Computational Physics”