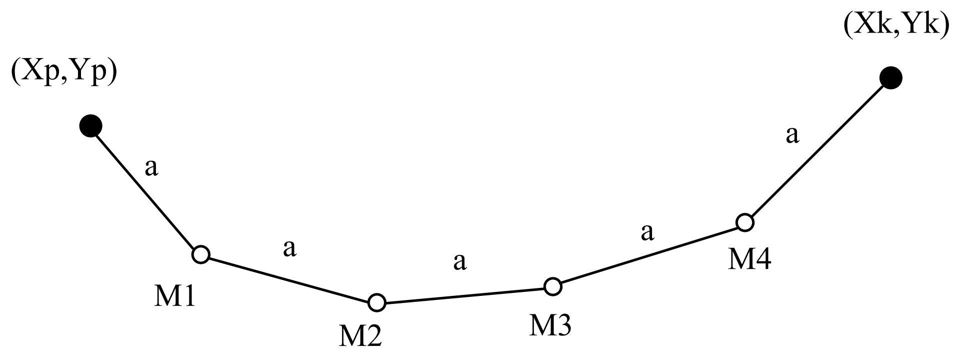
Projekt nr B.1.4

Wyliczanie krzywej łańcuchowej dla układu mas punktowych połączonych sprężynami lub sztywnymi drążkami

Wprowadzenie

Problem „krzywej łańcuchowej" sprowadza się do wyliczenia kształtu krzywej, która minimalizuje wartość energii potencjalnej w polu grawitacyjnym przy zadanej długości krzywej oraz punktach zaczepienia jej końców. Normalnie, w wersji ciągłej, zadanie to rozwiązuje się dla przypadku jednorodnej gęstości masy metodami rachunku wariacyjnego. W rozpatrywanym tutaj problemie występuje pewna „namiastka" problemu krzywej łańcuchowej. Badany jest przypadek dyskretnego rozkładu mas, tzn. N mas M_i połączonych między sobą nieważkimi połączeniami. Połączenia te w jednym przypadku są doskonale sztywne i nie gromadzą energii, zaś w drugim przypadku energia połączenia zależy od kwadratu jego długości (przypadek doskonałej, nieważkiej sprężyny).

A - przypadek połączeń doskonale sztywnych



Jako zmienne można wybrać wtedy sinusy kątów nachylenia poszczególnych połączeń do poziomu. Energia grawitacyjna i-tej masy w jednorodnym polu grawitacyjnym o natężeniu g ma wtedy postać:

$$E_i = a\, M_i\, g \sum_{k=1,i-1} y_k = a\, M_i\, g \sum_{k=1,i-1} \sin(\phi_k) \qquad (1)$$

Całkowita energia ma wtedy postać $E = \Sigma\, E_i$ (i=1,N). Zagadnienie sprowadza się do znalezienia minimum tej funkcji względem zmiennych y_i. Sprawę komplikuje fakt, że wartości y_i mogą zawierać się tylko w granicach $-1<y_i<1$ oraz że na y_i nałożone są dwa dodatkowe równania więzów związane z ustalonymi punktami zaczepienia końców. Warunek pierwszy związany jest z różnicą wysokości początku i końca:

$$W_1 = a \sum_{i=1,N+1} y_i = (Y_K - Y_P) \tag{2}$$

Warunek drugi związany jest z różnicą położeń w poziomie:

$$W_2 = a \sum_{i=1,N+1} \cos(\phi_i) = a \sum_{i=1,N+1} \sqrt{1-y_i^2} = (X_K - X_P) \tag{3}$$

Do wyznaczania minimum przy zadanych dodatkowych warunkach (więzach) używa się tzw. metody mnożników Lagrange'a. Minimalizuje się wtedy wielkość Ψ:

$$\Psi = \Sigma E_i + \lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 \tag{4}$$

Zmienne λ_1 i λ_2, czyli tzw. mnożniki Lagrange'a dochodzą jako dwie dodatkowe niewiadome. Istota sprawy polega na tym, że do (N+1) równań wynikających z zerowania się pochodnych cząstkowych Ψ po y_i (i=1,N+1) dochodzą dwa równania wynikające z zerowania pochodnych cząstkowych po zmiennych λ_1 i λ_2. Z tego wszystkiego otrzymuje się układ równań na N+3 niewiadomych (liniowy bądź nieliniowy), który należy rozwiązać numerycznie, sprawdzając czy rozwiązania na y_i mieszczą się w dopuszczalnych granicach. Można również użyć któregokolwiek z bibliotecznych programów minimalizujących do bezpośredniej minimalizacji funkcji Ψ, ale ze względu na to, że procedury minimalizujące są dość kapryśne, rozwiązanie to nie jest polecane.

Zadanie do wykonania

Napisać program generujący macierz powstałego układu równań liniowych przy zadanych masach oraz współrzędnych początku i końca łańcucha. Rozwiązać ten układ równań stosując samodzielnie wybraną metodę numeryczną.

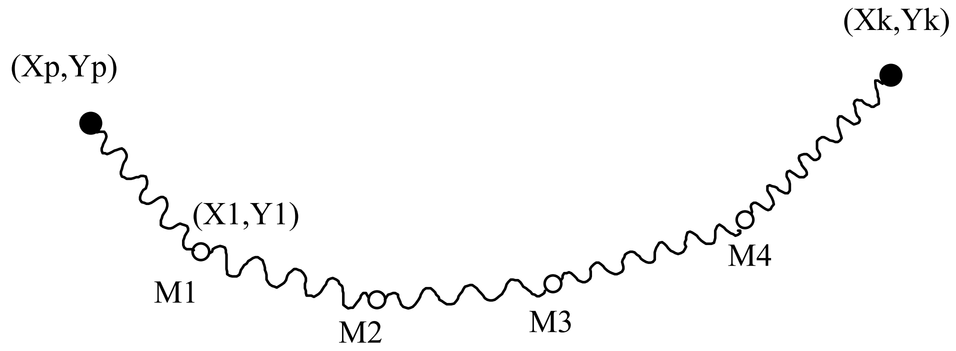
<u>Wejście</u>

Program wczytuje X_P, X_K, Y_P, Y_K, ilość segmentów i długość segmentu, sprawdza czy tak zdefiniowane dane nie są sprzeczne, a następnie prosi o podanie wartości mas pomiędzy poszczególnymi segmentami.

<u>Wyjście</u>

Program wypisuje rozwiązanie w postaci wektora y_i oraz wykonuje wykres przebiegu całego układu samodzielnie wybierając skale.

B - przypadek doskonale sprężystych połączeń między masami



W tym przypadku energię całkowitą (grawitacyjną i sprężystą) łatwo wyrazić przez współrzędne poziome poszczególnych mas X_i oraz ich współrzędne pionowe Y_i. Energia grawitacyjna ma postać:

$$E_g = \Sigma M_i g Y_i \qquad (i=1,N) \qquad (5)$$

Energia sprężysta przybiera postać:

$$E_s = \sum_{i=1,N+1} k\left[\left(X_i - X_{i-1}\right)^2 + \left(Y_i - Y_{i-1}\right)^2\right] \qquad (6)$$

Całkowita energia jest równa sumie E_g i E_s. W tym przypadku więzy nałożone na układ mają o wiele prostszą postać:

$$W_1 = X_{N+1} = X_K \qquad W_2 = Y_{N+1} = Y_K \qquad (7)$$

W tym przypadku więzy praktycznie nie istnieją, gdyż wartości X_{N+1} i Y_{N+1} można po prostu wstawić do funkcji energii a pozostałe zmienne X_i oraz Y_i potraktować jako zmienne do minimalizacji. Mamy wtedy 2N równań na 2N niewiadomych X_i,Y_i (i=1,N).

Problem można rozwiązać przez zróżniczkowanie energii całkowitej po tych zmiennych i znalezienie rozwiązania powstałego układu równań (w tym przypadku jest to na pewno układ liniowy). Do jego rozwiązania można się posłużyć odpowiednim programem bibliotecznym.

Zadanie do wykonania

Napisać program generujący macierz powstałego układu równań liniowych przy zadanych masach oraz współrzędnych początku i końca łańcucha. Rozwiązać ten układ równań przez wywołanie odpowiedniego programu bibliotecznego.

Wejście

Program wczytuje współrzędne początku i końca układu, stałą sprężystości k, ilość segmentów oraz poszczególne masy M_i.

Wyjście

Jak w części a) tzn., wypisanie X_i i Y_i oraz wykonanie wykresu przedstawiającego układ w stanie równowagi.

Literatura

[1] Press i in. Numerical Recipes

[2] W. Rubinowicz, Mechanika teoretyczna