Projekt nr B.1.2

Porównanie efektywności metod całkowania numerycznego równań różniczkowych na przykładzie równania ruchu wahadła

Wprowadzenie

Większość fizyków zdążyła się już przyzwyczaić do tego, że do opisu ruchu wahadła stosuje się przybliżoną (zlinearyzowaną) postać jego równania ruchu. Dla tej jego wersji dokładne wyrażenie na moment siły zastępowane jest przez jego zlinearyzowaną postać, co prowadzi do równania ruchu oscylatora harmonicznego. Rozwiązaniem takiego równania są oczywiście drgania sinusoidalne o określonej amplitudzie i fazie (zależnej od warunków początkowych), których omawianie tutaj mija się z celem. W problemie rozpatrywanym w tym projekcie mowa będzie o dokładnej postaci równania ruchu wahadła matematycznego, dla którego dokładne rozwiązanie również znane jest od dawna, aczkolwiek daleko mu do popularności rozwiązania przybliżonego. Powodem tego jest fakt, że wyraża się ono przez klasę funkcji specjalnych zwanych całkami eliptycznymi Jacobiego. Mimo tego, że nie potrafimy podać analitycznej postaci tych funkcji, znane są dość szybkie algorytmy numeryczne na ich generację, co umożliwia znalezienie dokładnego rozwiązania, a tym samym kontrolę błędu rozwiązania numerycznego otrzymywanego przez bezpośrednie całkowanie równania ruchu.

Energia potencjalna wahadła matematycznego o masie m i długości L odchylonego od pionu o kąt φ może być zapisana jako:

$$E_p(\varphi) = mgh(\varphi) = mgL\left[1 - \cos\varphi\right] \tag{1}$$

Moment siły działający na wahadło wychylone o kąt φ ma więc postać:

$$M(\varphi) = -\frac{\partial E_p(\varphi)}{\partial \varphi} = -mgL\sin\varphi \tag{2}$$

Wobec powyższego równanie Newtona dla ruchu obrotowego przybiera postać:

$$mL^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M(\varphi) = -mgL\sin\varphi \tag{3}$$

Jak zwykle, dla równania różniczkowego zwyczajnego drugiego rzędu, aby jednoznacznie określić rozwiązanie należy podać dwa warunki początkowe: na wychylenie początkowe φ_0 oraz na prędkość kątową w momencie rozpoczynania ruchu ω_0. Powyższe warunki początkowe można przełożyć na dwa inne parametry, znacznie bardziej intuicyjnie charakteryzujące rozwiązanie równania ruchu. Parametrami tymi są: maksymalne wychylenie wahadła (odpowiednik amplitudy w ruchu harmonicznym) oraz faza początkowa (równoważna wyborowi początku odczytu czasu). Pierwszy z tych parametrów jest ściśle związany z całkowitą energią mechaniczną danego rozwiązania równania ruchu, gdyż w momencie maksymalnego wychylenia całkowita energia jest dana wypisanym na początku wzorem (1). Ze względu na zachowanie energii musi ona być równa całkowitej energii mechanicznej w momencie rozpoczynania ruchu:

$$E_0(\varphi) = mgL[1 - cos\,\varphi_{max}] = \frac{mL^2\omega_0^2}{2} + mgL[1 - cos\,\varphi_0] \tag{4}$$

Równanie to pozwala wyliczyć maksymalne wychylenie φ_{max} z warunków początkowych. Łatwo zauważyć, że możliwe są dwie klasy rozwiązań dokładnego równania ruchu wahadła:

1. Rozwiązania, dla których E_0 jest mniejsze od $2mgL$, czyli dla których istnieje φ_{max} spełniające warunek $cos\ \varphi_{max} > -1$, jak tego żąda trygonometria. W takiej sytuacji φ_{max} jest zarazem tzw. punktem zwrotu, w którym prędkość kątowa wahadła wynosi zero. Rozwiązania tej klasy opisują ruch drgający wahadła, który jednak w ogólności nie jest ruchem harmonicznym, gdyż w szczególności nie spełnia on podstawowego warunku znanego dla ruchu harmonicznego, to jest niezależności okresu drgań od ich amplitudy. Zależność okresu drgań od amplitudy φ_{max} dana jest przez tzw. całkę eliptyczną pierwszego rodzaju (patrz np. podręcznik Arfkena [2]).
2. Rozwiązania z E_0 większym od $2mgL$, dla których brak jest rozwiązania rzeczywistego na φ_{max}. Takie rozwiązania równania ruchu opisują ruch obiegowy wahadła dookoła jego punktu zawieszenia, gdyż prędkość kątowa w takim ruchu nigdy nie staje się równa zeru (nawet w najwyższym położeniu wahadła). Prędkość kątowa ma stały znak, co oznacza że wahadło kręci się stale w tą samą stronę. Ta klasa rozwiązań nie będzie rozpatrywana w niniejszym problemie numerycznym.

Powyższe dwie klasy rozwiązań są doskonale rozróżnialne po narysowaniu toru wahadła w tzw. przestrzeni fazowej, tzn. (φ, ω). Tory odpowiadające klasie 1. są torami zamkniętymi, dla których φ jest ograniczone do przedziału $(-\varphi_{max}, \varphi_{max})$, zaś prędkość kątowa ω zmienia znak w trakcie ruchu. Tory należące do klasy 2. nie są krzywymi ograniczonymi, gdyż wartości φ mogą wzrastać w sposób ciągły do nieskończoności (lub maleć do minus nieskończoności), a prędkość kątowa nie zmienia znaku w trakcie ruchu.

Zagadnienia numeryczne

Problem numeryczny sprowadza się do uruchomienia programu zadającego warunki początkowe, weryfikującego, że rozwiązanie będzie należało do klasy 1. przez obliczenie energii początkowej, a następnie wykonującego całkowanie równania za pomocą procedury wybranej przez użytkownika z kilku dostępnych możliwości. Program powinien bardzo dokładnie analizować błędy rozwiązania bądź to przez monitoring bieżącej energii rozwiązania (która powinna pozostawać stała dla rozwiązania dokładnego) bądź przez porównanie okresu oscylacji w rozwiązani numerycznym z dokładnymi wartościami okresu (patrz Arfken [2] lub skrypt do laboratorium WFiTJ A. Zięby [3]).

Równanie ruchu wahadła jest równaniem drugiego rzędu i z punktu widzenia numerycznego może być potraktowane na dwa sposoby:

1. bezpośrednie całkowanie z użyciem metody różnicowej wykorzystującej aproksymację drugiej pochodnej:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} \approx \frac{\varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1}}{h^2} \approx -(g/L)\,sin\,\varphi_n \tag{5}$$

2. poprzez rozłożenie równania na układ dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu na wychylenie i prędkość kątową i wykorzystanie metod znanych dla równań pierwszego rzędu

$$\begin{cases} \dfrac{d\omega}{dt} = -(g/L)\,sin\,\varphi \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \omega \end{cases} \tag{6}$$

Zadania do wykonania

1. Przygotować program z wymiennymi procedurami całkowania numerycznego, wśród których oprócz metody bezpośredniej dla równania drugiego rzędu powinny się znaleźć metody Eulera, Verleta oraz Rungego-Kutty dla układów równań pierwszego rzędu.
2. Wykonać całkowanie równania dla dwóch wychyleń maksymalnych $\varphi_{max} = 3°$ i $\varphi_{max} = 30°$ porównując wyniki monitorowania energii dla różnych metod przy krokach czasowych od 0.01 T_0 do 0.0001 T_0, gdzie T_0 jest okresem wahadła dla małych wychyleń.
3. Wykonać wykresy błędu energii po kilku okresach wahadła w zależności od długości kroku oraz wybranej metody całkowania.
4. Dla długości kroku gwarantującej odpowiednią dokładność wykonać obliczenia zależności okresu drgań wahadła od amplitudy dla kilku różnych metod całkowania. Wartości amplitudy przyjąć takie jak na I Pracowni Fizycznej, tj. 10, 20, 30, 40, 50 oraz 60°.
5. Wykonać wykresy odchylenia obliczonej wartości okresu drgań od wartości dokładnej, w zależności od zastosowanej metody całkowania.

Literatura

1. dowolny podręcznik mechaniki (np. Rudderman, Kittel - Mechanika) omawiający porządnie zagadnienie wahadła
2. Arfken, Mathematical Methods for Physicists
3. Zięba i in., Ćwiczenia laboratoryjne na I Pracowni Fizycznej WFiTJ