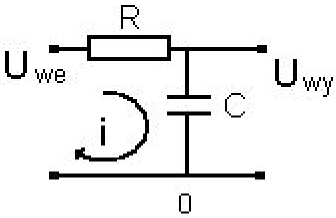
Odpowiedź filtra dolnoprzepustowego na impuls napięciowy o zadanej charakterystyce

W niemal każdym bardziej zaawansowanym urządzeniu elektronicznym stosuje się filtry, których zadaniem jest np. stabilizacja napięć i prądów w układzie. Jednym z najprostszych jest filtr dolnoprzepustowy, który przedstawiono na rys. 1.
Rozważony w tym zadaniu układ uproszczono - posiada on wejście do którego przykłada się napięcie U_{we} oraz wyjście, z którego odczytuje się bezprądowo napięcie U_{wy}. Napięcia te wyznacza się względem wspólnego poziomu odniesienia tzw. masy. Zwyczajowo przyjmuje się, że poziom odniesienia znajduje się na napięciu zerowym.



Rys 1. Schemat filtra dolno-przepustowego

Układ powyższy opisuje się przy pomocy równania różniczkowego, które wyprowadzimy korzystając z podstawowych zależność prądu od napięcia dla rezystora:

$$i(t) = \frac{U(t)}{R}, \qquad (1)$$

i dla kondensatora:

$$i(t) = C\frac{U(t)}{dt}. \qquad (2)$$

Dla filtra dolno-przepustowego zależność na prąd płynący przez kondensator wyniesie:

$$i(t) = C\frac{dU_{wy}(t)}{dt}, \qquad (3)$$

Ten sam prąd płynie przez opornik R, na którym spadek napięcia wynosi U_{wy} :

$$i(t) = \frac{U_{we}(t) - U_{wy}(t)}{R} \qquad (4)$$

Po odjęciu stronami równań (3) i (4) otrzymamy:

$$\frac{dU_{wy}(t)}{dt} + \frac{1}{RC}\left(U_{we}(t) - U_{wy}(t)\right) = 0 \qquad (5)$$

Równanie to posłuży do wyznaczenia $U_{wy}(t)$ dla zadanego $U_{we}(t)$. Przebieg $U_{wy}(t)$ dla zadanego impulsu $U_{we}(t)$ nazywane jest odpowiedzią układu.
Odpowiedź układu można wyznaczyć z równania (5) dla napięć sinusoidalnych:

$$U_{wy} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + 1}} U_{we}, \qquad (6)$$

Różnica faz pomiędzy sinusoidą wejściową a wyjściową wyniesie:

$$\Delta\varphi = \arctan(-\omega RC). \qquad (7)$$

gdzie $\Delta\varphi = 2\pi\omega\, dt$
Proszę zauważyć że dla $\omega >> 1/RC$ U_{wy} jest bliskie zeru, zaś dla $\omega << 1/RC$ $U_{wy} \approx U_{we}$.

Zadania:
Zbadać odpowiedź filtra dolno-przepustowego rozwiązując równanie różniczkowe (5) dla:
1) napięcia testowego:

$U_{we}(t) = \cos(at)$

porównać wynik z wzorami analitycznymi (6) i (7).
2) impulsu w kształcie funkcji Gaussa:

$$U_{we}(t) = \exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{2\tau^2}\right)\mathrm{V} + 1.\mathrm{V}$$

dla $\tau = 1$ ms i $\tau = 0.01$ ms
w przedziale czasowym od 0 do 10τ,
przyjąć $t_0 = 5\tau$, C = 10 μF, R = 1 kΩ .
Przyjąć brak prądu na kondensatorze dla t=0.

Odpowiednie równanie należy rozwiązać metodą Eulera i Rungego-Kutty 4-go rzędu,
Proszę przemyśleć problem warunku początkowego.